УДК 517.935.2

Оптимизация алгоритмов моделирования динамики комбинированных систем[1]

Андрейченко Д. К., Мельничук Д. В., Рокаха Г. Е.
(Саратов, Россия)
andreichenkodk@gmail.com, melnichukdv@sgu.ru, g.rokah@yandex.ru

Предложена оптимизация алгоритмов моделирования переходных процессов в нелинейных комбинированных динамических системах на основе проекционного метода Галеркина и «жестко устойчивых» методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: комбинированные динамические системы, проекционный метод.

Optimization of algorithms for modeling the dynamics of hybrid systems[1]

D. K. Andreichenko, D. V. Melnichuk, G. E. Rokakh
(Saratov, Russia)
andreichenkodk@gmail.com, melnichukdv@sgu.ru, g.rokah@yandex.ru

Optimization of algorithms for modeling transients in nonlinear hybrid dynamical systems based on the Galerkin projection method and "rigidly stable"methods of numerical integration of ordinary differential equations is proposed

Keywords: hybrid dynamical systems, projection method.

Введение

Комбинированные динамические системы (КДС) [1] являются математическими моделями технических систем с объектами управления с сосредоточенными и распределенными по пространству параметрами. Моделирование переходных процессов в КДС после дискретизации по независимым пространственным переменным приводит к численному интегрированию «жестких» систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности и значительно ускоряется на основе «жестко устойчивых» методов [2] при оптимизации вычисления матрицы Якоби.

Алгоритмы моделирования динамики

Уравнения движения нелинейной КДС с входной $\mathbf{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_x}$ и выходной $\mathbf{y}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_y}$ функциями времени t в форме связанных посредством граничных условий и условий связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях можно привести к виду, аналогичному [3]

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{h});\ \mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u})dS \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(t,\mathbf{u},\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}),\ \mathbf{r}\in\Omega;\ \mathbb{G}(\mathbf{u},\mathbf{y})|_S = 0,\ S=\partial\Omega \tag{2}$$

$$\mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0,\ \mathbf{u}(\mathbf{r},0)=\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^{N_r}$ – независимые пространственные координаты, $\Omega\subset\mathbb{R}^{N_r}$ – область, занятая объектами с распределенными параметрами, S – граница области, $\mathbf{u}:\mathbb{R}^{N_r}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_u}$ характеризует движение объектов с распределенными параметрами, $\mathbf{h}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_h}$, $\mathbf{f}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{N_x}\times\mathbb{R}^{N_y}\times\mathbb{R}^{N_h}\to\mathbb{R}^{N_y}$, операторы $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ соответствуют уравнениям в частных производных, граничным условиям и условиям связи; $\dot{()} = d()/dt$ либо $\dot{()} = \partial()/\partial t$. Начальные условия соответствуют равновесному состоянию, и $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ являются решением (1), (2) при $\dot{()}\equiv 0$. Функция $\mathbf{f}$ дифференцируема по $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$, а операторы $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ дифференцируемы по Фреше по $\mathbf{u}$ и дифференцируемы по $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$, $\dot{\mathbf{y}}$. Пусть $\mathbf{W}_k(\mathbf{r})$, $\mathbf{W}_k{:}\Omega\to\mathbb{R}^{N_u}$ $k=1,2,\ldots$ – полная система функций в области Ω; $\Gamma_k(\mathbf{r}|_s)$, $\Gamma_k: S\to\mathbb{R}^{N_G}$, $k=1,2,\ldots$ – полная система функций на границе S. Дискретизация уравнений в частных производных и граничных условий (2) по независимым пространственным переменным $\mathbf{r}$ выполняется проекционным методом Галёркина

$$\begin{gathered}\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\approx\textstyle\sum_{k=1}^{N_\Omega+N_S} u_k(t)\mathbf{W}_k(\mathbf{r});\ \ \int_S \mathbb{G}(\mathbf{u},\mathbf{y})\cdot\Gamma_k(\mathbf{r})dS=0,\ k=\overline{1,N_S}\\ \int_\Omega \dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{W}_k(\mathbf{r})d\Omega = \int_\Omega \mathbb{F}(t,\mathbf{u},\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})\cdot\mathbf{W}_k(\mathbf{r})d\Omega,\ k=\overline{1,N_\Omega}\end{gathered} \tag{4}$$

где $()\cdot()$ – скалярное произведение векторов. Из (1), (4) следует задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(t,\mathbf{Y}),\ \mathbf{Y}(0)=\mathbf{Y}_0;\ \mathbf{Y}=(y_1,y_2,\ldots,y_{N_y},u_1,u_2,\ldots,u_{N_\Omega})^T \tag{5}$$

$$\mathbf{F}(-0,\mathbf{Y}_0)=0 \tag{6}$$

Линейные уравнения возмущенного движения КДС имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{h})}{\partial\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{h})}{\partial\mathbf{h}}\hat{\mathbf{h}};\ \hat{\mathbf{h}} = \int_S \frac{\partial\mathbb{H}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}dS\\ \dot{\hat{\mathbf{u}}} = \frac{\partial\mathbb{F}(t,\mathbf{u},\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})}{\partial\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}} + \frac{\partial\mathbb{F}(t,\mathbf{u},\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})}{\partial\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial\mathbb{F}(t,\mathbf{u},\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\dot{\hat{\mathbf{y}}},\ \mathbf{r}\in\Omega;\\ \left.\left(\frac{\partial\mathbb{G}(\mathbf{u},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}} + \frac{\partial\mathbb{G}(\mathbf{u},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}\right)\right|_S = 0\end{gathered} \tag{7}$$

Дискретизация (7) на основе (4) приводит к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\hat{\mathbf{Y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{N_y}, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_{N_\Omega})^T$. Численное решение (6) методом Ньютона и дальнейшее численное интегрирование (5) на основе «жестко устойчивых» методов требует вычисления матрицы Якоби $\partial\mathbf{F}(t,\mathbf{Y})/\partial\mathbf{Y}$, что весьма трудоемко для задач большой размерности. Эффективное вычисление матрицы Якоби реализуется на основе следующих утверждений:

Теорема. *Если функция* $\mathbf{f}$ *дифференцируема по* $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$, *операторы* $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ *дифференцируемы по Фреше по* $\mathbf{u}$ *и дифференцируемы по* $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$, $\dot{\mathbf{y}}$, *то, в предположении* $\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{Y}_j]$, $\hat{Y}_j = \delta_k^j$, $k, j = \overline{1, N_y + N_\Omega}$ *(*δ_k^j *– символ Кронекера),* k*-й столбец матрицы Якоби* $\partial\mathbf{F}(t,\mathbf{Y})/\partial\mathbf{Y}$ *может быть вычислен применением к линейным уравнениям возмущенного движения КДС* (7) *того же варианта проекционного метода* (4), *на основе которого из исходных нелинейных уравнений КДС* (1)-(3) *получена нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений* (5).

Следствие. *Столбцы матрицы* $\partial\mathbf{F}(t,\mathbf{Y})/\partial\mathbf{Y}$ *могут быть вычислены независимо, т.е. параллельно.*

Моделирование цилиндрического гидродинамического подвеса

Математическая модель подвеса в безразмерных переменных имеет вид

$$\pi\beta(\rho_2/\rho - 1)\ddot{\mathbf{y}} = \pi(\rho_2/\rho - 1)\gamma(\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \mathbf{N},\ \pi\rho_2 J\dot{\omega}/\rho = -\beta G/\sigma \tag{8}$$

$$\mathbf{g} = (0, -1)^T,\ h = 1 - \mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_r - \tfrac{1}{2}\beta(\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_\varphi)^2,\ \mathbf{e}_r = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)^T$$

$$v_r = -(1-\beta\xi)\textstyle\int_0^\xi d\xi\partial v_\varphi/\partial\varphi,\ p = p|_{\xi=0} + \beta\int_0^\xi (v_\varphi^2 + 2v_\varphi)d\xi$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\varphi}\textstyle\int_0^h v_\varphi d\xi = \tfrac{\partial}{\partial\varphi}\left[(1+\beta h)(\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{e}_\varphi)\right],\ \mathbf{e}_\varphi = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi)^T \tag{9}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \left[1 + (1-\beta\xi)v_\varphi\right]\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi} + \beta v_r(2 + v_\varphi) = \tag{10}$$

$$= -(1-\beta\xi)\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\xi^2} + \beta\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi} + \beta^2\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$v_\varphi|_{\xi=0} = -\omega,\ v_\varphi|_{\xi=h(\varphi,t)} = \beta(\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{e}_\varphi) \tag{11}$$

$$\mathbf{N} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\beta}{\sigma}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi} - \frac{\partial p}{\partial\varphi}\right)\bigg|_{\xi=0}\mathbf{e}_\varphi d\varphi,\ G = 2\pi\beta\omega + \int_0^{2\pi}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0} d\varphi \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ и ω – смещение внутреннего тела и разность угловых скоростей внешнего и внутреннего тел; $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ – вектор перегрузок; $\mathbf{x}_{\text{кдс}}(t) = \mathbf{a}(t)$, $\mathbf{y}_{\text{кдс}}(t) = (y_1(t), y_2(t), \omega(t))^T$ - входная и выходная функции; β – относительный зазор; $\mathbf{N}$, G – сила и момент сил; ρ_2, ρ –

плотности внутреннего тела и жидкости; ξ, φ – радиальная координата и полярный угол; h – толщина поддерживающего слоя; p, v_r, v_φ – давление и компоненты скорости в жидкости; σ – колебательное число Рейнольдса. По сравнению с [4] в (10) учтено слагаемое $\beta^2\sigma^{-1}\partial^2 v_\varphi/\partial\varphi^2$. После перехода к деформированной координате $x = \xi/h$ к (8)-(12) применялся проекционный метод (4) при $v_\varphi(x,\varphi,t) \approx \sum_{n=0}^{N_x+2}\sum_{k=-N_\varphi}^{N_\varphi} v_{\varphi_{nk}}(t)T_n(2x-1)e^{ik\varphi}$, $v_{\varphi_{n,-k}} = \bar{v}_{\varphi_{nk}}$, $\partial p/\partial\varphi|_{x=0} \approx \sum_{k=1}^{N_\varphi}(p_k(t)e^{ik\varphi} + p_{-k}(t)e^{-ik\varphi})$, $p_{-k} = \bar{p}_{-k}, T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Численное интегрирование полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений выполнялось явно-неявным методом Адамса переменного шага и порядка с 1 по 13 либо «жестко устойчивым» ФДН-методом [2] переменного шага и порядка с 1 по 5, в том числе и с распараллеливанием вычислений. Математическая модель (8)-(12) приводит к меньшим смещениям внутреннего тела и амплитудам его колебаний по сравнению с [4]. Для подвеса с параметрами $\beta = 0.2$, $\rho_2/\rho = 0.594$, $J = 0.5$, $\gamma = 1.847$, $\sigma = 10$ при $\mathbf{a}(t) = (0, a\cdot 1(t))^T$, $a = 0.355$ данные о затратах времени при моделировании выходных функций на процессоре Intel i7 1065G7 x4 приведены в таблице 1.

Таблица 1: Время численного моделирования, *с.*

N_x	N_φ	Адамс, послед.	ФДН, послед.	ФДН, парал.
7	10	4909	23.8	10.9
9	10	25346	41.3	17.3
11	10	45783	58.7	23.6
13	10	66220	76.2	29.9
15	10	86657	93.6	36.2
7	15	13434	125	54.0

Переход к оптимизированной версии алгоритма на основе ФДН-метода позволяет на порядок сократить время компьютерного моделирования. Далее, оптимизированный алгоритм ощутимо ускоряется за счет распараллеливания вычисления столбцов матрицы Якоби. Сокращение времени компьютерного моделирования составляет от 250 до 2400 раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.

[2] *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М : Мир, 1999. 512 с.

[3] *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В., Портенко М. С.* Адаптивный алгоритм параметрического синтеза комбинированных динамических си-

стем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 465–475.

[4] *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 1. С. 13-26.