УДК 517.51

Об оценках наилучших M–членных приближений функций многих переменных в пространстве с равномерной метрикой [1]

Г. Акишев (Астана, Казахстан)
akishev_g@mail.ru

В статье рассматриваются пространство непрерывных функций с равномерной метрикой и анизотропное пространство Лоренца–Зигмунда периодических функций многих переменных и класс Никольского–Бесова в этом пространстве. Установлены оценки наилучших M–членных тригонометрических приближений функций из класса Никольского-Бесова в равномерной метрике.

Ключевые слова: равномерная метрика, пространство Лоренца–Зигмунда, класс Никольского–Бесова, M–членное приближение..

Благодарности: Работа выполнена в рамках грантового финансирования Комитета науки Министерства науки и высшего образования РК (Проект AP19677486).

On estimates of the best M–term approximations of functions of many variables in a space with a uniform metric [1]

G. Akishev (Astana, Kazakhstan)
akishev_g@mail.ru

The paper considers the space of continuous functions with a uniform metric and the anisotropic Lorentz-Zygmund space of periodic functions of many variables and the Nikol'skii–Besov class in this space. We have established estimates of the best M-term trigonometric approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class in a uniform metric.

Keywords: a uniform metric, Lorentz–Zygmund space, Nikol'skii–Besov class, M–term approximation..

Acknowledgements: This research was supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677486).

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^m$—m-мерное евклидово пространство точек $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_m)$ с вещественными координатами, $\mathbb{Z}_+^m$— множество точек пространства $\mathbb{R}^m$, с неотрицательными целыми координатами, $\mathbb{T}^m=[0,2\pi)^m$.

$C(\mathbb{T}^m)$—пространство непрерывных функций имеющих период 2π по каждой переменной с нормой $\|f\|_\infty:=\max_{\overline{x}\in\mathbb{T}^m}|f(\overline{x})|$

Пусть $\overline{p}=(p_1,\ldots p_m)$, $\overline{\tau}=(\tau_1,\ldots\tau_m)$, $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\ldots\alpha_m)$ и $p_j,\tau_j\in(1,\infty)$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $j=1,...,m$. Через $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца–Зигмунда — всех измеримых по Лебегу функций m переменных f имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}:=\|\ldots\|f^{*_1,\ldots,*_m}\|_{p_1,\alpha_1,\tau_1}\ldots\|_{p_m,\alpha_m,\tau_m}<\infty,$$

где $f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1,...,t_m)$ - невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$ по каждой переменной $x_j\in[0,1)$ при фиксированных остальных переменных (см. [1]) и

$$\|g\|_{p,\alpha,\tau}:=\left\{\int_0^1\big(g(t)\big)^\tau\big(1+|\log_2 t|\big)^{\alpha\tau}t^{\frac{\tau}{p}-1}dt\right\}^{\frac{1}{\tau}}.$$

Для $\alpha_j=0$, $j=1,...,m$ пространство $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ является анизотропным пространством Лоренца и обозначается $L^*_{\overline{p},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$, а $\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}}=\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\tau}}$ (см. [1]).

Если $\alpha_j=0$ и $p_j=\tau_j=p$, $j=1,...,m$, то $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)=L_p(\mathbb{T}^m)$ – известное пространство Лебега с нормой $\|f\|_p$.

$l_{\overline{p}}$ — пространство последовательностей $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}_+^m}$ действительных чисел с нормой

$$\left\|\left\{a_{\overline{n}}\right\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\overline{p}}}=\left\{\sum_{n_m=0}^\infty\left[...\left[\sum_{n_1=0}^\infty|a_{\overline{n}}|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}}...\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}}<+\infty,$$

для $1\le p_j<+\infty$, $j=1,2,...,m$, $\overline{p}=(p_1,\ldots,p_m)$ и $\left\|\{a_{\overline{n}}\}\right\|_{l_\infty}=\sup\limits_{\overline{n}\in\mathbb{Z}_+^m}|a_{\overline{n}}|$ для $p_j=\infty$, $j=1,...,m$.

Введем обозначения : $a_{\overline{n}}(f)$—коэффициенты Фурье функции $f\in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}$ и $\langle\overline{y},\overline{x}\rangle=\sum\limits_{j=1}^m y_jx_j$,

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})=\sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})}a_{\overline{n}}(f)\,e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $\rho(\bar{s}) = \big\{\overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad [2^{s_j-1}] \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\big\}$, $[y]$– целая часть действительного числа y и $s_j \in \mathbb{Z}_+$.

В теории функций и ее приложениях важное значение имеет $S^{\overline{r}}_{p,\theta}B$– пространство Никольского–Бесова в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leqslant p < \infty$ и его различные обобщения (см. [2], [3]).

Рассматривается аналог класса Никольского–Бесова в анизотропном пространстве Лоренца–Зигмунда:

$$\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B := \Big\{f \in \mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m) : \ \|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} + \Big\|\Big\{\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}\Big\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\Big\|_{l_{\overline{\theta}}} \leq 1\Big\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $1 < p_j, \tau_j < \infty$, $0 < \theta_j \leqslant +\infty$, $0 < r_j < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$.

В случае $\alpha_j = 0$ и $\tau_j = p_j = p$, $j = 1, \ldots, m$ класс $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}B$, совпадает с известным классом Никольского — Бесова $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$ (см. [2], [3]).

Для функции $f \in C(\mathbb{T}^m)$ рассматривается $e_M(f)_\infty$ — наилучшее M–членное тригонометрическое приближение, $M \in \mathbb{N}$ (см. [4], [5]). Если F – некоторый функциональный класс в пространстве $C(\mathbb{T}^m)$, то положим $e_M(F)_\infty = \sup_{f\in F} e_M(f)_\infty$.

Оценки порядка M–членного приближения функций класс Никольского–Бесова $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ в равномерной метрике установлены Э.С. Белинским [4], А.С. Романюком [5] соответственно в случаях $\theta = \infty$ и $2 \leqslant \theta < \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r_1 > \max\{1/p,\ 1/2\}$. При малых гладкостях $1/p < r_1 \leqslant 1/2$ оценки величины $e_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\infty}B)_\infty$ установлены в недавней совместной работе В. Н. Темлякова и Т. Ульриха [6], теоремы 6.2–6.3.

В докладе будут представлены оценки величины $e_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}B)_\infty$.

В частности,

Теорема. *Пусть* $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ *и* $1 < p_j, \tau_j < \infty$, $1 \leqslant \theta_j \leq \infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$ *и* $0 < r_{j_0} - \max\{\frac{1}{p_{j_0}}, \frac{1}{2}\} = \min\{r_j - \max\{\frac{1}{p_j}, \frac{1}{2}\} : j = 1, ..., m\}$, $A = \{j : r_j - \max\{\frac{1}{p_j}, \frac{1}{2}\} = r_{j_0} - \max\{\frac{1}{p_{j_0}}, \frac{1}{2}\},\ j = 1, ..., m\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$.

1. Если $2 \leqslant \theta_j \leq +\infty$, $p_j \in (1, 2) \cup (2, \infty)$, $1 < \tau_j < \infty$, $j = 1, ..., m$, *то*

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\big)_\infty \ll M^{-(r_{j_0}-(\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{2})_+)}(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}-(\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{2})_+)-\sum\limits_{j\in A}\alpha_j}$$

$$\times(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})}(\log M)^{1/2},$$

при условии $\min\{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})-\sum\limits_{j\in A\setminus\{j'\}}\alpha_j,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_{j'}}-\alpha_{j'}\}>0$, *где* $j'=\max\{j\in A\}$.

2. Если $\alpha_j=0$ *и* $2\leqslant\theta_j\leq+\infty$, $p_j\in(1,2)\cup(2,\infty)$, $1<\tau_j<\infty$, $j=1,...,m$, *то*

$$M^{-(r_{j_0}-(\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{2})_+)}(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}-(\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{2})_+)}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})}\ll e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{0},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\big)_\infty$$

3. Если $p_j=2$ *и* $1<\tau_j<\infty$, $2\leqslant\theta_j\leqslant\infty$, $\alpha_j=0$, $j=1,...,m$, *то*

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\overline{0},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\big)_\infty\ll\Big(\frac{\log^{|A|-1}}{M}\Big)^{r_{j_0}}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})+\sum\limits_{j\in A}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})_+}(\log M)^{1/2}.$$

Теорема доказана конструктивным методом, с использованием леммы 6. 1 [7].

Замечание. В случае $\tau_j=p_j=p$, $\theta_j=\theta$, $\alpha_j=0$, для $j=1,...,m$ из сформулированной теоремы следует теорема 1 [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Blozinski A.P.* Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms //Trans. Amer. Math. Soc., 1981, Vol. 263, P. 146–167.

[2] *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Труды МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.

[3] *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-ата : Наука, 1976. 224 с.

[4] *Belinskii E.S.* Approximation of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics and estimates of ϵ–entropy // Anal. math. , 1989, Vol. 15 , N 2, P. 67–74.

[5] *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 2. С. 247–261.

[6] *Temlyakov V. N. , Ullrich T.* Approximation of functions with small mixed smoothness in the uniform norm // J. Approx. Theory. 2022. Vol. 277, № 105718. (ArXiv:2012.11983v1, 2020. 21 pp.).

[7] *Темляков В. Н.* Конструктивные разреженные тригонометрические приближение функций и другие задачи для функций смешанной гладкости // Матем. сб. 2016. Т. 206, № 11. С. 131–160.