ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛА СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ В КОМПАНИИ С ПРОИЗВОЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ ДОГОВОРА

Д. Д. Даммер

Томский государственный университет, Россия
E-mail: di.dammer@yandex.ru

В работе рассматривается модель страховой компании в виде системы массового обслуживания. Предполагается, что приходящие в компанию клиенты образуют простейший поток, срок действия договора есть случайная величина с произвольной функцией распределения. Находится характеристическая функция числа страховых выплат. Исследование проводится с применением метода марковского суммирования.

RESEARCH OF THE NUMBER OF INSURANCE PAYMENTS IN A COMPANY WITH AN ARBITRARY DISTRIBUTED DURATION OF THE CONTRACT

D. D. Dammer

In this pape- r, we consider the model of an insurance company in the form of a queueing system. It is assumed that clients coming to the company form a stationary Poisson process; the duration of the contract is a random variable with an arbitrary distribution function. The characteristic function of the number of insurance payments is found. The study is carried out using the Markov summation method.

Методы и модели массового обслуживания широко применяются при исследовании различных экономических систем [1-3]. Для изучения немарковских систем, которые и моделируют работу реальных объектов, требуется развитие подходов анализа моделей массового обслуживания. В данной работе исследуется поток страховых выплат клиентам и находится распределение вероятностей числа выплат, произведенных на интервале $[0,\infty)$. Для решения задачи применяется метод марковского суммирования, который был предложен и реализован в работах [4,5].

Рассмотрим модель страховой компании в виде системы массового обслуживания (рис.1) с неограниченным числом приборов и простейшим входящим потоком с параметром λ. Времена обслуживания заявок на приборе (сроки действия договора) есть независимые случайные величины с функцией распределения $B(x)$. Каждая заявка во время обслуживания формирует события, которые образуют простейший поток с параметром γ. Такой поток мы будем называть дополнительным потоком или d-потоком. В работе будем различать локальный и суммарный d-потоки. Данные потоки можно рассматривать в качестве моделей потоков выплат клиентам страховой компании.

Введем следующие определения: локальным d-потоком будем называть

© Даммер Д. Д., 2023

последовательность моментов наступления событий от одной заявки, суммарным d-потоком (или d-потоком) – от всех заявок, поступивших в систему.

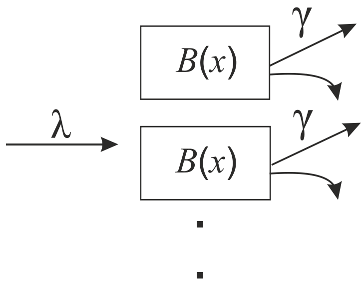

Рис. 1. Модель страховой компании
в виде системы массового обслуживания

Введем обозначения: $i(t)$ – число заявок, находящихся в системе на обслуживании в момент времени t, $n(t)$ – число событий d-потока от заявок, пришедших в систему на интервале $[0,t]$, $P(n,t)$ – вероятность того, что $n(t)=n$, $r(i,t)$ – вероятность того, что одна заявка, поступившая в момент времени t, формирует i событий d-потока.

Задача состоит в нахождении вида распределения вероятностей, а точнее, характеристической функции числа событий d-потока (числа страховых выплат), сформированных на интервале $[0,\infty)$ всеми заявками, поступившими в систему на интервале $(-\infty,T]$, $T>0$. Схема формирования такого d-потока представлена на рисунке 2. В работе [6] найдено распределение вероятностей числа событий d-потока, при условии, что в начальный момент времени $t=0$ система пуста, то есть фактически учитывались только заявки, поступившие в систему после момента $t=0$.

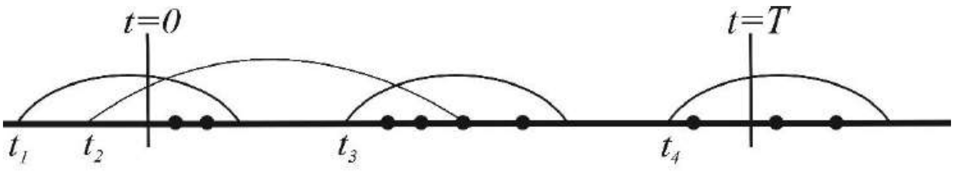

Рис. 2. Схема формирования дополнительного потока событий на $[0,\infty)$

Обозначим продолжительность обслуживания заявки на приборе случайной величиной ξ. Для заявки, поступившей в момент времени $t<0$, события d-потока будут учитываться после момента $t=0$, то есть на интервале длины $\xi+t$. Функция распределения времени обслуживания таких заявок, в течение которого мы учитываем события d-потока, будет иметь имеет вид:

$$P\{\xi+t<x\}=P\{\xi<x-t\}=B(x-t),\ t<0.$$

Для заявки, поступившей на интервале $[0,T]$, будут учитываться все сформированные события d-потока. Запишем выражение для распределения $r(i,t)$

для $t \geq 0$: $r(i,t) = \int\limits_0^\infty \frac{(\gamma x)^i}{i!} e^{-\gamma x} dB(x),\ t \geq 0$.

В случае $t < 0$ значение $i = 0$, если обслуживание заявки завершилось до момента $t = 0$, заявка покинула систему и, конечно, после этого момента она ничего не сгенерировала; или, если обслуживание заявки не завершилось до момента времени $t = 0$, и за время $\xi + t$ заявка ничего не сгенерировала. Тогда

$$r(0,t) = P\{\xi + t < 0\} + \int\limits_0^\infty e^{-\gamma x} dB(x-t) = B(-t) + \int\limits_{-t}^\infty e^{-\gamma(z+t)} dB(z)),\ t < 0,\ i = 0.$$

В случае $t < 0$ значение $i > 0$, если обслуживание заявки не завершилось до момента времени $t = 0$, и за время $\xi + t$ заявка сгенерировала *i* событий *d*-потока. Тогда $r(i,t) = \int\limits_{-t}^\infty \frac{(\gamma(z+t))^i}{i!} e^{-\gamma(z+t)} dB(z),\ t < 0,\ i > 0$.

Запишем выражение для функции распределения числа событий локального *d*-потока, сформированного заявкой, пришедшей в момент времени *t*:

$$r(i,t) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \frac{(\gamma x)^i}{i!} e^{-\gamma x} dB(x),\ t \geq 0, \\ B(-t) + \int\limits_0^\infty e^{-\gamma x} dB(x-t) = B(-t) + \int\limits_{-t}^\infty e^{-\gamma(z+t)} dB(z),\ t < 0,\ i = 0, \\ \int\limits_{-t}^\infty \frac{(\gamma(z+t))^i}{i!} e^{-\gamma(z+t)} dB(z),\ t < 0,\ i > 0. \end{cases}$$

Далее запишем выражение для характеристической функции полученного распределения:

$$R(u,t) = r(0,t) + \sum_{i=1}^\infty r(i,t) e^{jui} = B(-t) + \int\limits_{-t}^\infty \exp\{\gamma(z+t)(e^{ju}-1)\} dB(z) =$$

$$= B(-t) + \exp\{\gamma t(e^{ju}-1)\} \int\limits_{-t}^\infty \exp\{\gamma z(e^{ju}-1)\} dB(z),\quad t < 0,$$

$$R(u,t) = R(u) = \sum_{i=0}^\infty r(i,t) e^{jui} = \int\limits_0^\infty \exp\{\gamma x(e^{ju}-1)\} dB(x),\ t \geq 0.$$

Из допредельных равенств

$$P(n,t+\Delta t) = P(n,t)(1-\lambda\Delta t) + \lambda\Delta t \sum_{i=0}^n P(n-i,t) r(i,t) + o(\Delta t),\ -\infty < t \leq T$$

для распределения $P(n,t)$ получим систему уравнений Колмогорова в виде:

$$\frac{\partial P(n,t)}{\partial t}=\lambda\sum_{i=0}^{n}P(n-i,t)r(i,t)-\lambda P(n,t),\ -\infty<t\le T,\ n=0,1,2,.. \qquad (1)$$

Введем характеристическую функцию $h(u,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(n,t)$ числа $n(t)$ событий суммарного d-потока. Для этой функции систему (1) перепишем в виде уравнения:

$$\frac{\partial h(u,t)}{\partial t}=\lambda\left[R(u,t)-1\right]h(u,t),\ -\infty<t\le T. \qquad (2)$$

Решение уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию $h(u,-\infty)=1$, имеет вид

$$h(u,t)=\exp\left\{\lambda\int_{-\infty}^{t}\left[R(u,x)-1\right]dx\right\},\ -\infty<t\le T.$$

С учётом вида функции $R(u,x)$ получим выражения для характеристической функций $h(u,t)$. Рассмотрим случай $-\infty<t\le T,\ T\le 0$ с начальным условием $h_1(u,-\infty)=1$, тогда:

$$h_1(u,t)=\exp\left\{\lambda\left(\int_{-t}^{\infty}\left(B(y)-1\right)dy+\int_{-t}^{\infty}\frac{e^{a(u)(y+t)}-1}{a(u)}dB(y)\right)\right\},\ -\infty<t\le T,\ T\le 0.$$

Для случая $0\le t\le T, T>0$ с начальным условием $h_1(u,0)=h_2(u,0)$ получим:

$$h_2(u,t)=\exp\left\{\lambda\left(\int_{-\infty}^{0}\left[B(-x)+e^{a(u)x}\int_{-x}^{\infty}e^{a(u)y}dB(y)-1\right]dx+\int_{0}^{t}\left[\int_{0}^{\infty}e^{a(u)y}dB(y)-1\right]dx\right)\right\},$$

где $a(u)=\gamma(e^{ju}-1)$.

После преобразований получим выражение для искомой характеристической функции числа $n(T)$, $T>0$:

$$h_2(u,T)=\exp\left\{-\lambda b+\lambda\left(\frac{1}{a(u)}+T\right)\left(R(u)-1\right)\right\},\ T>0, \qquad (3)$$

где $a(u)=\gamma(e^{ju}-1)$, $b-$ среднее время обслуживания заявки, а характеристическая функция $R(u)$ определяется выражением $R(u)=\int_{0}^{\infty}\exp\{\gamma x(e^{ju}-1)\}dB(x)$.

Распределение вероятностей числа $n(T)$ для $T>0$ находится обратным по u преобразованием Фурье: $P_2(n,T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jun}h_2(u,T)du$.

С применением системы Mathcad выполнена численная реализация. Ее результат в случае, когда время обслуживания имеет гамма-распределение с параметрами формы $\alpha=0,5$ и масштаба $\beta=1$, а также $\gamma=1$, $\lambda=2$ и $T=5$, представлен на рис. 3.

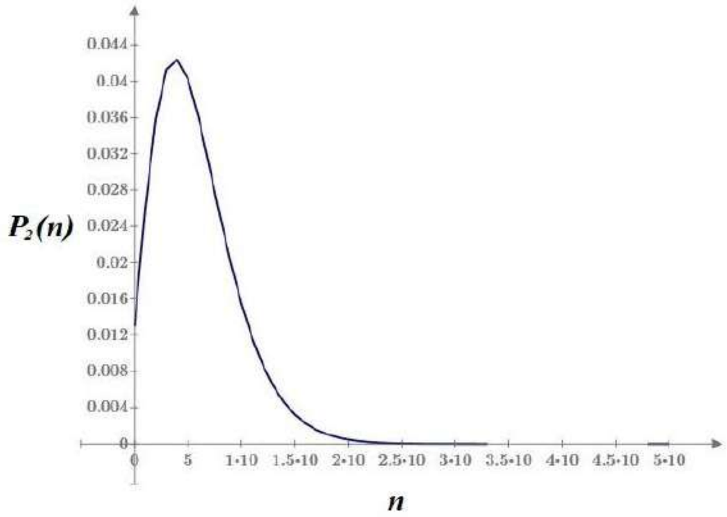

Рис. 3. Распределение вероятностей
$P_2(n)$ числа событий d-потока

Таким образом, в работе получена характеристическая функция числа страховых выплат, производимых на интервале $[0,\infty)$ клиентам, приходящим в компанию на интервале $(-\infty,T]$, $T>0$. Для решения задачи был применен метод марковского суммирования. Результаты, полученные в данном исследовании, могут использоваться при оценке деятельности страховой компании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матальыцкий М. А., Станкевич С. Э.* НМ-сети как новые стохастические модели прогнозирования доходов различных объектов // Вестник ГрГУ. Серия 5. Экономика. 2009. № 1. С. 107-115.

2. *Даммер Д. Д.* Исследование математической модели страховой компании в виде системы массового обслуживания в случайной среде и с учетом единовременных страховых выплат // Компьютерные науки и информационные технологии. Материалы Междун. науч. конф. 2018. С. 117-121.

3. *Жидкова Л. А., Моисеева С. П.* Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторным обращением к блокам // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322. № 6. С. 5-9.

4. *Nazarov A., Dudin A., Dammer D., Moiseev A. Methods* of limiting decomposition and markovian summation in queueing system with infinite number of servers // ITMM 2018. Communications in Computer and Information. 2018. Vol. 912. P. 71-82.

5. *Nazarov A. A., Dammer D. D.* A Study of Additionally Generated Flows in Systems with Unlimited Number of Devices and Recurrent Servicing with the Markov Summation Method // Autom. Remote Control. 2019. Vol. 80. № 12. P. 2178-2188.

6. *Даммер Д. Д., Федерягина П. В.* Исследование дополнительно формируемого потока в системе с экспоненциальным обслуживанием и неограниченным числом приборов методом марковского суммирования // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : сб. материалов межд. конф. 2020. С 260-265.