О ЛАКУНАРНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА

Ю. С. Солиев

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, Россия
E-mail: su1951@mail.ru

Рассматривается применение некоторых типов лакунарного интерполирования к приближенному вычислению сингулярного интеграла с ядром Гильберта. Построены квадратурные формулы на основе (0,2,3), (0,1, M), (0,1,2, M)-интерполирования плотности интеграла. Остаточные члены квадратурных формул оцениваются для плотностей из классов непрерывно-дифференцируемых гельдеровых функций.

ON LACUNAR QUADRATURE FORMULAS FOR A SINGULAR INTEGRAL WITH A HILBERT KERNEL

Yu. S. Soliev

The application of some types of lacunar interpolation to the approximate calculation of a singular integral with a Hilbert kernel is considered. Quadrature formulas based on (0,2,3), (0,1, M), (0,1,2, M)-interpolation of the density of the integral are constructed. The residual terms of quadrature formulas are estimated for densities from classes of continuously differentiable Helder functions.

Рассмотрим понимаемый в смысле главного значения по Коши сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$\Gamma f = \Gamma(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, ctg\frac{t-x}{2}\,dt, \tag{1}$$

где $f(x) - 2\pi$-периодическая заданная плотность интеграла.

Многие задачи физики, аэродинамики, теории упругости, электродинамики, теории антенн и др. приводят к сингулярным интегральным уравнениям (см., напр., [1]). Для реализации численных методов решения сингулярных уравнений необходимо разрабатывать приближенные методы вычисления сингулярных интегралов, входящих в такие уравнения. Интерполяционные квадратурные формулы для интеграла (1) достаточно хорошо разработаны (см., напр., [2]). В работе [3] рассмотрены также некоторые квадратурные формулы с кратными узлами и с пропусками производных (лакунарные квадратурные формулы). Квадратурные формулы с узлами различной кратности для интеграла (1) нашли применение при приближенном решении сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений (см., напр., [1], [4]).

К приближенному вычислению интеграла (1) можно применить различные типы лакунарного интерполирования, когда они существуют и их можно выписать в явном виде. Рассмотрим применение некоторых типов лакунарного интерполирования [5] - [8] к приближенному вычислению интеграла (1).

Пусть $H_n f = H_n(f;x)-$тригонометрический полином соответствующего порядка, удовлетворяющий условиям (0,2,3) -интерполирования [5], [6] :

$$H_n(f;x_k)= f(x_k),\ H_n''(f;x_k)=b_k,\ H_n'''(f;x_k)=c_k,\ x_k=\frac{2k\pi}{n}, k=\overline{0,n-1}.$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом $H_n f$, получим квадратурную формулу

$$\Gamma f=\Gamma(H_n f;x)+R_n f=\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k)U(x-x_k)+b_kV(x-x_k)+$$
$$+c_kW(x-x_k))+R_n f, \tag{2}$$

где $U(x)=\frac{1}{n^3}\left(-2\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(n^2-j^2)^2}{n^2-3j^2}\sin jx+\sum_{j=m+1}^{3m-1}\frac{(2n^2-3nj+j^2)^2}{n^2-3(n-j)^2}\sin jx\right)-$

$$-\frac{1}{8n}(9\sin mx-\sin 3mx),$$

$$V(x)=\frac{1}{n^3}\left(-2\sum_{j=1}^{m-1}\frac{n^2+3j^2}{n^2-3j^2}\sin jx+\frac{1}{4}\sum_{j=m+1}^{3m-1}\frac{n^2+3(3n-2j)^2}{n^2-3(n-j)^2}\sin jx\right)-$$

$$-\frac{1}{2}(\sin mx-\sin 3mx),$$

$$W(x)=-\frac{1}{n^3}\left(4\sum_{j=1}^{m}\frac{j\cos jx}{n^2-3j^2}+\sum_{j=m+1}^{3m-1}\frac{(3n-2j)\cos jx}{n^2-3(n-j)^2}\right),\quad n=2m;$$

$$U(x)=\frac{1}{n^3}\left(-2\sum_{j=1}^{m}\frac{(n^2-j^2)^2}{n^2-3j^2}\sin jx+\sum_{j=m+1}^{3m+1}\frac{(2n^2-3nj+j^2)^2}{n^2-3(n-j)^2}\sin jx\right),$$

$$V(x)=\frac{1}{n^3}\left(-2\sum_{j=1}^{m}\frac{n^2+3j^2}{n^2-3j^2}\sin jx+\frac{1}{4}\sum_{j=m+1}^{3m+1}\frac{n^2+3(3n-2j)^2}{n^2-3(n-j)^2}\sin jx\right),$$

$$W(x)=-\frac{1}{n^3}\left(4\sum_{j=1}^{m}\frac{j\cos jx}{n^2-3j^2}+\sum_{j=m+1}^{3m+1}\frac{(3n-2j)\cos jx}{n^2-3(n-j)^2}\right),\quad n=2m+1,$$

а $R_n f = R_n(f;x)-$остаточный член.

Теорема 1. *Если* $f(x)\in H_\alpha(M), 0<\alpha\le 1,\ |b_k|=O(n^{2-\alpha}), |c_k|=O(n^{3-\alpha})$, $k=\overline{0,n-1}$, *то для остаточного члена квадратурной формулы (2) справедлива оценка*

$$\|R_n f\|_C=O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right). \tag{3}$$

Оценка (3) сохраняется и в случае $(0,p,q)$-интерполирования [6] ($p<q$, p и $q-$разной четности), если $f(x)\in H_\alpha(M), 0<\alpha\le 1, |b_k|=O(n^{p-\alpha})$, $|c_k|=O(n^{q-\alpha})$, $k=\overline{0,n-1}$.

Если в (2) $b_k = f''(x_k), c_k = f'''(x_k)$, $k = \overline{0, n-1}$, то получим лакунарную (0,2,3)-интерполяционную квадратурную формулу для интеграла (1).

Теорема 2. *Пусть в (2)* $b_k = f''(x_k), c_k = f'''(x_k)$, $k = \overline{0, n-1}$, $f(x) \in H_\alpha^{(r)}(A), 0 < \alpha \le 1, r \ge 3$. *Тогда* $\|R_n f\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-3}}\right), r + \alpha > 3$.

Рассмотрим теперь (0,1, M)-интерполирование. Пусть $P_n f = P_n(f; x) -$ тригонометрический полином соответствующего порядка [7], удовлетворяющий условиям

$$P_n(f; x_k) = f(x_k), P_n'(f; x_k) = B_k, P_n^{(M)}(f; x_k) = C_k, x_k = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1},$$

где $M \ge 2 -$ четное число.

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом $P_n f$, получим квадратурную формулу

$$\Gamma f = \Gamma(P_n f; x) + R_n f = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k)\tilde{U}(x - x_k) + B_k \tilde{V}(x - x_k) +$$
$$+ C_k \tilde{W}(x - x_k)) + R_n f, \tag{4}$$

где $\tilde{U}(x) = \frac{1}{n^2}\left(-2\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\sin jx + 4(-1)^{\frac{M}{2}}\sum_{j=1}^{m}\gamma_j(\sin jx - \sin nx \cos jx\right)$,

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{n^2}\left(2\sum_{j=1}^{n-1}\cos jx + \cos nx + 4(-1)^{\frac{M}{2}}\sum_{j=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\beta_j \cos jx\right), \tilde{W}(x) = n^{-M-1}\sin nx -$$

$$-\frac{4}{n}\left(\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j(\sin jx - \sin nx \cos jx) + 2\alpha_m(\sin mx - \sin nx \cos mx)\right), \quad n = 2m;$$

$$\tilde{W}(x) = n^{-M-1}\sin nx - \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(\sin jx - \sin nx \cos jx, \quad n = 2m+1,$$

$$\alpha_j = \left((n+j)^M + (n-j)^M - 2j^M\right)^{-1}, \beta_j = \left((n-j)^M - j^M\right)\alpha_j,$$

$$\gamma_j = \left((n-j)j^M + j(n-j)^M\right)\alpha_j,$$

а $R_n f = R_n(f; x) -$ остаточный член.

Заметим, что при $M = 2, B_k = f'(x_k), C_k = f''(x_k)$, формула (4) с $\alpha_j = \frac{1}{2n^2}$, $\beta_j = \frac{n-2j}{2n}, \gamma_j = \frac{j(n-j)}{2n}$, превращается в квадратурную формулу с кратными узлами, основанной на (0,1,2)-интерполировании по Эрмиту.

Теорема 3. *Если* $f(x) \in H_\alpha(M), 0 < \alpha \le 1$, $|B_k| = O(n^{1-\alpha}), |C_k| = O(n^{M-\alpha})$, $k = \overline{0, n-1}$, *то для остаточного члена квадратурной формулы (4) справедлива оценка (3).*

Теорема 4. *Пусть в (3)* $B_k = f'(x_k), C_k = f''(x_k), k = \overline{0, n-1}$,

$f(x)\in H_{\alpha}^{(r)}(A), 0<\alpha\le 1, r\ge M$. *Тогда* $\|R_n f\|_C = O\left(\dfrac{\ln n}{n^{r+\alpha-M}}\right), r+\alpha>M$.

Пусть $Q_n f = Q_n(f;x)-$тригонометрический полином порядка $2n$, удовлетворяющий условиям (0,1,2, M)-интерполирования [8]:

$$Q_n(f;x_k)=f(x_k),\ Q_n'(f;x_k)=\alpha_k,\ Q_n''(f;x_k)=\beta_k,$$

$$Q_n^{(M)}(f;x_k)=\gamma_k,\ x_k=\frac{2k\pi}{n}, k=\overline{0,n-1},$$

где $M\ge 3-$нечетное число.

Заменяя плотность интеграла (1) полиномом $Q_n f$, получим квадратурную формулу

$$\Gamma f=\Gamma(Q_n f;x)+R_n f=\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k)A(x-x_k)+\alpha_k B(x-x_k)+\beta_k C(x-x_k)+$$

$$+\gamma_k D(x-x_k))+R_n f, \tag{5}$$

где $A(x)=-\dfrac{2}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\sin jx+\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{d_{j,M}}{a_{j,M}}(\sin jx-\sin nx\cos jx\right),$

$$B(x)=\frac{1}{n^2}\left(2\sum_{j=1}^{n-1}\cos jx+\cos nx+\frac{1}{n}\left(2(1-\cos nx)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{c_{j,M}}{a_{j,M}}\cos jx+\frac{c_{n,M}}{a_{n,M}}\left(\cos nx-\frac{1}{2}\cos 2nx\right)\right)\right),$$

$$C(x)=\frac{1}{n^3}\left(\sin nx-2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{b_{j,M}}{a_{j,M}}(\sin jx-\cos jx\sin nx)\right),$$

$$D(x)=\frac{2}{n}(-1)^{\frac{M+1}{3}}\left(2(1-\cos nx)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\cos jx}{a_{j,M}}-\frac{1}{a_{n,M}}(1+\cos x)\cos nx\right),$$

$$a_{j,M}=(2n-j)^M+(n+j)^M-3\left((n-j)^M+j^M\right), b_{j,M}=(2n-j)^M-2(n-j)^M-j^M,$$

$$c_{j,M}=(3n-2j)j^M+4(n-j)^{M+1}-(n-2j)(2n-j)^M,$$

$$d_{j,M}=j(n-j)(2n-j)\left((2n-j)^{M-1}-2(n-j)^{M-1}+j^{M-1}\right),$$

а $R_n f=R_n(f;x)-$остаточный член.

Теорема 5. *Если* $f(x)\in H_{\alpha}(M), 0<\alpha\le 1,\ |\alpha_k|=O(n^{1-\alpha}), |\beta_k|=O(n^{2-\alpha}\ln n),$ $|\gamma_k|=O(n^{M-\alpha}),\ k=\overline{0,n-1}$, *то для остаточного члена квадратурной формулы (5) справедлива оценка (3).*

Теорема 6. *Пусть в (5)* $\alpha_k=f'(x_k), \beta_k=f''(x_k), \gamma_k=f^{(M)}(x_k), k=\overline{0,n-1},$ $f(x)\in H_{\alpha}^{(r)}(A), 0<\alpha\le 1, r\ge M$. *Тогда* $\|R_n f\|_C=O\left(\dfrac{\ln n}{n^{r+\alpha-M}}\right), r+\alpha>M$.

При $M=3$ из (5) получаем квадратурную формулу с кратными узлами, основанной на (0,1,2,3)-интерполирование по Эрмиту.

Аналогично строятся лакунарные интерполяционные квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши по отрезку действительной оси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. , ТОО «Янус», 1995. 520 с.

2. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань : Изд-во Казанского университета, 1980. 232 с.

3. *Солиев Ю. С.* Квадратурные и кубатурные формулы с кратными узлами для сингулярных интегралов. канд. дисс. Казань: КГУ, 1979. 124 с.

4. *Федотов А. И.* Аппроксимация решений сингулярных интегродифференциальных уравнений полиномами Эрмита-Фейера // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10. № 2. С. 109-117.

5. *Sharma A., Varma A. K.* Trigonometric interpolation (0,2,3) case // Annales Polonici Mathematci. 1968. P. 51-58.

6. *Зеель Э. О.* О тригонометрическом (0, p, q)-интерполировании // Известия высших учебных заведений. Математика. 1970. № 3. С. 27-35.

7. *Varma A. K.* Trigonometric interpolation // J. of Math. Anal. and Appl. 1969. Vol. 28. P. 652-659.

8. *Varma A. K.* Hermite-Birkhoff trigonometric interpolation // J. of the Australian Math. Soc. 1973. Vol. 15. № 2. P. 228-242.