ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЫНКА ТРУДА С ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ НЕОГРАНИЧЕННОГО РОСТА

И. А. Силантьева

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина, Россия
E-mail: irinasilantevais@yandex.ru

В статье предложена четырехфакторная динамическая модель рынка труда, основанная на модифицированной производственной функции неограниченного роста, учитывающей постоянную миграцию, постоянные внешние инвестиции, конкуренцию за ограниченный ресурс рабочих мест. Найдены равновесные траектории динамической системы, сформулирована их содержательная экономическая интерпретация, определены условия их устойчивости с помощью соответствующих систем линейного приближения.

STUDY OF EQUILIBRIUM TRAJECTORIES OF A DYNAMIC MODEL OF THE LABOUR MARKET WITH A PRODUCTION FUNCTION OF UNLIMITED GROWTH

I. A. Silantyeva

We develop a four-factor dynamic model of the labor market based on a modified production function of unlimited growth, which considers constant migration, constant external investment, and competition for a limited resource of jobs. The equilibrium trajectories of the dynamic system are found, their substantive economic interpretation is formulated, and their stability conditions are determined by means of the corresponding linear approximation systems.

В статье продолжается исследование следующей четырехфакторной автономной динамической модели рынка труда, предложенной в [1] и дополненной факторами «инвестиции» и «миграционное сальдо» в [2]:

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1-a)F(K,L) + I, \\ \dot{L} = r_L Q\left(1 - \frac{Q}{M_L}\right), \\ \dot{N} = rN\left(1 - \frac{N+P}{M}\right), \\ \dot{Q} = \gamma_1 N + \gamma_2 F(K,L) + \gamma_3 P, \end{cases} \tag{1}$$

где K – капитал (стоимость основных фондов экономики); L – труд (численность населения, занятого в экономике); N – численность населения, постоянно проживающего в регионе; Q – численность рабочей силы; $F(K,L)$ – производственная функция; $(1-a)\in[0;1)$ – коэффициент накопления основного капитала), $\mu \in (0;1)$ – норма амортизации, M_L и M – максимально допустимые численности рабочих мест и населения соответственно ($M > N + P$, $M_L > L$), $\{r_L, r\} \in (-1;1)$ – коэффициенты прироста рабочих мест и населения соответственно; I – постоянные внешние инвестиции, P – миграционное сальдо (может быть как положительной, так и отрицательной величиной); $\gamma_2 \in (-1,1)$ – коэффициент изменения рабочей силы за счет развития экономики ($\gamma_2 > 0$ характеризует высвобождение рабочей силы); $\{\gamma_1, \gamma_3\} \in [0;1)$ – коэффициент естественного прироста рабочей силы и коэффициент прироста рабочей силы за счет миграции.

В отличие от [2], рассмотрим производственную функцию с неограниченным ростом вида $F(K,L) = KL(K+L)$ [3], с учетом которой система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1-a)KL(K+L) + I, \\ \dot{L} = r_L Q\left(1 - \frac{Q}{M_L}\right), \\ \dot{N} = rN\left(1 - \frac{N+P}{M}\right), \\ \dot{Q} = \gamma_1 N + \gamma_2 KL(K+L) + \gamma_3 P. \end{cases} \tag{2}$$

Ставится задача: найти состояния равновесия системы (2), исследовать их устойчивость и поведение траекторий в окрестности состояний равновесия методами качественной теории дифференциальных уравнений [4].

Непосредственными вычислениями для системы (2) были получены состояния равновесия $O_1(K_1; L_1; 0; 0)$, $O_2(K_1; L_1; 0; M_L)$, $O_3(K_2; L_2; M-P; 0)$, $O_4(K_2; L_2; M-P; M_L)$, где

$$K_1 = \frac{I}{\mu} - \frac{(1-a)\gamma_3 P}{\mu\gamma_2}, \; L_1 = -\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}\sqrt{K_1^2 - \frac{4\gamma_3 P}{\gamma_2 K_1}}, \tag{3}$$

$$K_2 = \frac{I}{\mu} - \frac{(1-a)\left(\gamma_1 M + (\gamma_3 - \gamma_1)P\right)}{\mu\gamma_2}, \; L_2 = -\frac{1}{2}K_2 + \frac{1}{2}\sqrt{K_2^2 - \frac{4\left(\gamma_1 M + (\gamma_3 - \gamma_1)P\right)}{\gamma_2 K_2}}. \tag{4}$$

Так как содержательно интерпретируемыми являются состояния равновесия O_1, O_2, O_3, O_4 с неотрицательными координатами, то необходимо установить соотношения между постоянными внешними инвестициями I, миграционным сальдо P и коэффициентами системы (2), определяющими такие состояния равновесия. Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Для $K_1 \geq 0$ и $L_1 \geq 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\frac{P}{\gamma_2} < 0$.

Доказательство. В силу предположений о коэффициентах и внешних факторах системы (1) отрицательными могут быть миграционное сальдо P и коэффициент γ_2. Поэтому отношение $\frac{P}{\gamma_2}$, входящее в выражения (3), может быть как положительным, так и отрицательным. Очевидно, что $K_1 \geq 0$ тогда и только тогда, когда $I \ge \frac{(1-a)\gamma_3 P}{\gamma_2}$. Значение L_1 должно быть вещественным. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $K_1^2 - \frac{4\gamma_3 P}{\gamma_2 K_1} \ge 0$, которое справедливо при всех $K_1 \ge \sqrt[3]{\frac{4\gamma_3 P}{\gamma_2}}$. Подставляя в последнее неравенство $K_1 = \frac{I}{\mu} - \frac{(1-a)\gamma_3 P}{\mu\gamma_2}$ и разрешая его относительно I, получим неравенство $I \ge \frac{(1-a)\gamma_3 P}{\gamma_2} + \mu\sqrt[3]{\frac{4\gamma_3 P}{\gamma_2}}$, которое справедливо как при $\frac{P}{\gamma_2} > 0$, так и при $\frac{P}{\gamma_2} < 0$. При $K_1 \ge 0$ и $I \ge \frac{(1-a)\gamma_3 P}{\gamma_2} + \mu\sqrt[3]{\frac{4\gamma_3 P}{\gamma_2}}$ для $L_1 \ge 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $-\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}\sqrt{K_1^2 - \frac{4\gamma_3 P}{\gamma_2 K_1}} \ge 0$. Разрешая его относительно $K_1 \ge 0$, получим неравенство $\frac{4\gamma_3 P}{\gamma_2 K_1} \le 0$, которое при $\frac{P}{\gamma_2} > 0$ противоречит условиям $K_1 \ge 0$ и $\gamma_3 \in [0;1)$, и не противоречит им при $\frac{P}{\gamma_2} < 0$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Для $K_2 \ge 0$ и $L_2 \ge 0$ необходимо и достаточно выполнения одного (любого) из трёх условий:

1) $P < 0$, $\frac{\gamma_1}{\gamma_3} > \frac{|P|}{M+|P|}$, $\gamma_2 < 0$;

2) $P > 0$, $\gamma_2 < 0$;

3) $P < 0$, $\frac{\gamma_1}{\gamma_3} < \frac{|P|}{M+|P|}$, $\gamma_2 > 0$.

Доказательство. Аналогично утверждению 1 доказано, что для $K_2 \ge 0$ и $L_2 \ge 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\frac{(\gamma_1 M + (\gamma_3 - \gamma_1)P)}{\gamma_2} < 0$, которое равносильно одной из следующих систем неравенств:

$$1)\ \begin{cases} P < 0, \\ \gamma_1(M-P) + \gamma_3 P > 0, \\ \gamma_2 < 0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} P > 0, \\ \gamma_1(M-P) + \gamma_3 P > 0, \\ \gamma_2 < 0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} P < 0, \\ \gamma_1(M-P) + \gamma_3 P < 0, \\ \gamma_2 > 0; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} P > 0, \\ \gamma_1(M-P) + \gamma_3 P < 0, \\ \gamma_2 > 0. \end{cases}$$

Далее непосредственными вычислениями получено, что система 1) равносильна условию 1), система 2) равносильна условию 2), система 3) равносильна условию 3), а система 4) противоречива при $\{\gamma_1, \gamma_3\} \in [0;1)$. Утверждение 2 доказано.

Заметим, что при выполнении условий 2) и 3) утверждения 2 система (2) имеет 4 состояния равновесия в области неотрицательных координат $OKLNQ$, а при выполнении условия 1) утверждения 2) – только 2 (так как в этом случае из утверждения 1 следует, что $L_1 < 0$). Условия $P > 0$, $\gamma_2 < 0$ и $P < 0$, $\gamma_2 > 0$ характеризуют ситуацию, когда потоки высвобождающейся рабочей силы и внешней миграции противоположны.

Далее исследовалось поведение траекторий системы (2) в окрестности каждого состояния равновесия с использованием свойств соответствующей системы линейного приближения. Ниже в таблице представлены матрицы систем линейного приближения в окрестности каждого состояния равновесия и их собственные значения.

Исследование состояний равновесия (СР) системы (2) с использование свойств соответствующих систем линейного приближения

СР	Матрица соответствующей системы линейного приближения	Собственные значения
O_1	$\begin{pmatrix} -\mu+(1-a)L_1(2K_1+L_1) & (1-a)K_1(K_1+2L_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_L \\ 0 & 0 & r\left(1-\frac{P}{M}\right) & 0 \\ \gamma_2 L_1(2K_1+L_1) & \gamma_2 K_1(K_1+2L_1) & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -\mu+(1-a)L_1(2K_1+L_1)$, $\lambda_2 = \frac{-\mu\gamma_2 K_1(K_1+2L_1)}{-\mu+(1-a)L_1(2K_1+L_1)}$, $\lambda_3 = r\left(1-\frac{P}{M}\right)$, $\lambda_4 = r_L$
O_2	$\begin{pmatrix} -\mu+(1-a)L_1(2K_1+L_1) & (1-a)K_1(K_1+2L_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_L \\ 0 & 0 & r\left(1-\frac{P}{M}\right) & 0 \\ \gamma_2 L_1(2K_1+L_1) & \gamma_2 K_1(K_1+2L_1) & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -\mu+(1-a)L_1(2K_1+L_1)$, $\lambda_2 = \frac{-\mu\gamma_2 K_1(K_1+2L_1)}{-\mu+(1-a)L_1(2K_1+L_1)}$, $\lambda_3 = r\left(1-\frac{P}{M}\right)$, $\lambda_4 = -r_L$
O_3	$\begin{pmatrix} -\mu+(1-a)L_2(2K_2+L_2) & (1-a)K_2(K_2+2L_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_L \\ 0 & 0 & r\left(1-\frac{P}{M}\right) & 0 \\ \gamma_2 L_2(2K_2+L_2) & \gamma_2 K_2(K_2+2L_2) & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -\mu+(1-a)L_2(2K_2+L_2)$, $\lambda_2 = \frac{-\mu\gamma_2 K_2(K_2+2L_2)}{-\mu+(1-a)L_2(2K_2+L_2)}$, $\lambda_3 = r\left(1-\frac{P}{M}\right)$, $\lambda_4 = r_L$
O_4	$\begin{pmatrix} -\mu+(1-a)L_2(2K_2+L_2) & (1-a)K_2(K_2+2L_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_L \\ 0 & 0 & -r\left(1-\frac{P}{M}\right) & 0 \\ \gamma_2 L_2(2K_2+L_2) & \gamma_2 K_2(K_2+2L_2) & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -\mu+(1-a)L_2(2K_2+L_2)$, $\lambda_2 = \frac{-\mu\gamma_2 K_2(K_2+2L_2)}{-\mu+(1-a)L_2(2K_2+L_2)}$, $\lambda_3 = -r\left(1-\frac{P}{M}\right)$, $\lambda_4 = -r_L$

С точки зрения экономики наиболее привлекательным является состояние равновесия O_4, так как оно характеризует экономику с ненулевой численностью населения и с ненулевой численностью рабочей силы, проживающей в этом регионе. Поэтому целесообразно, чтобы это состояние равновесия было устойчивым по первому приближению [4], а состояния равновесия O_1, O_2, O_3 – неустойчивыми.

Заметим, что для всех состояний равновесия собственные значения соответствующих матриц систем линейного приближения действительны и различны (см. таблицу 1). В этом случае для асимптотической устойчивости состояния равновесия по первому приближению достаточно, чтобы собственные значения были отрицательны, а для устойчивости достаточно, чтобы среди собственных значений не было положительных чисел, но были нулевые собственные значения, которые являлись бы простыми или кратность m такого значения λ равна $4-r$, где $r = rang(A-\lambda E)$, A – матрица соответствующей системы линейного приближения.

Рассмотрим состояние равновесия O_4. Из утверждений 1 и 2 и условий $\mu \in (0;1)$, $\{r_L, r\} \in (-1;1)$ следует, что $\lambda_1 < 0$ при $(1-a)L_1(2K_1 + L_1) < \mu$, $\lambda_3 < 0$ при $r > 0$, $\lambda_4 < 0$ при $r_L > 0$. Тогда собственное значение $\lambda_2 = \frac{-\mu\gamma_2 K_2(K_2+2L_2)}{-\mu+(1-a)L_2(2K_2+L_2)}$ имеет отрицательный знаменатель, а его числитель будет положительным при $\gamma_2 < 0$. В этом случае остальные 3 состояния равновесия O_1, O_2, O_3 будут неустойчивыми (так как тогда хотя бы одно из собственных значений из λ_3 и λ_4 положительно).

С точки зрения содержательной интерпретации такая экономика возможна в случае, когда в регионе развивается производство с увеличением числа рабочих мест так, что рабочей силы, проживающей в регионе, не хватает.

Дальнейшее исследование модели (1) предполагает подбор производственной функции с ограниченным ростом, при которой система (1) будет иметь состояния равновесия с положительными координатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лискина Е. Ю.* Состояния равновесия динамической модели рынка труда // Дифференциальные уравнения и математические моделирование: межвуз. сб. науч. тр. 2021. Вып. 2. С. 36-39.

2. *Лискина Е. Ю., Силантьева И. А.* Исследование равновесных траекторий неавтономной динамической модели рынка труда // Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии: материалы IX Междунар. науч.-прак. Конф. 2023. С. 84.

3. *Шараев Ю. В.* Теория экономического роста : учеб. пособие для вузов. М. : Изд. Дом ГУ ВШЭ, 2006. 254 с.

4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. СПб. : Лань, 2008. 480 с.