# СРАВНЕНИЕ АСИМПТОТИКИ И ЗАТРАТ ПО ПАМЯТИ У АЛГОРИТМОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПОИСКА ЦИКЛОВ В СИЛЬНО СВЯЗНЫХ ОРГРАФАХ

**Д. В. Мельничук, Д. С. Пантелеев, Д. К. Андрейченко**

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*
E-mail: melnichukdv@sgu.ru, panteleevds@sgu.ru, andreichenkodk@gmail.com

Известно, что задача поиска всех циклов в сильно связных орграфах имеет комбинаторную асимптотическую сложность по числу вершин графа, что делает практически неприменимыми подобные алгоритмы к достаточно большим графам, возникающим при анализе эффективности валютных транзакций. Вместе с тем, при оптимизации валютных транзакций представляют теоретический интерес некоторые оптимальные циклы наименьшего веса, для которых можно предложить алгоритмы не более чем полиномиальной асимптотической сложности по числу вершин и ребер, трудоемкость которых сравнима с классическими алгоритмами Флойда и Джонсона.

# COMPARISON OF ASYMPTOTICS AND MEMORY COSTS OF ALGORITHMS IN SOLVING PROBLEMS OF SEARCHING SIMPLE CYCLES IN STRONGLY CONNECTED DIGRAPHES

**D. V. Melnichuk, D. S. Panteleev, D. K. Andreichenko**

The problem of searching all cycles in strongly connected oriented graphs has an asymptotic complexity in the number of graph vertices, which makes similar algorithms practically inapplicable to sufficiently large graphs that have place when analyzing the efficiency of currency transactions. At the same time, when optimizing currency transactions, some optimal minimal weight cycles of theoretical interest, for which it is possible to propose algorithms of no more than polynomial asymptotic complexity in the number of vertices and edges, the complexity of which is comparable to the classical algorithms of Floyd and Johnson.

## 1. Задача об оптимизации валютных транзакций.

При выполнении валютных транзакций валютам с указанием финансовой организации можно сопоставить вершины $V_i$, $i=\overline{1,N}$ некоторого ориентированного графа $G=(V,E)$, $E\subset V\times V$ с положительными весами дуг

$$b_{ij}=\begin{cases}0<\left|(V_i,V_j)\right|<\infty, & (V_i,V_j)\in E\\ 1, & i=j\\ \infty & \text{в противном случае}\end{cases}$$

Выполнение валютных транзакций с возвратом в исходную валюту в исходной финансовой организации соответствует некоторому циклу $C_k=<V_k,V_{i_0},...,V_{i_n},V_k>$. Количество единиц валюты после проведения транзакций по сравнению с исходным определяется произведением, которое желательно сделать максимальным

$$P_k = b_{ki_0} b_{i_n k} \prod\nolimits_{j=1}^{n} b_{i_{j-1} i_j} \to \max \qquad (1)$$

Если $P_k > 1$, валютные транзакции приносят некоторый выигрыш, а если $P_k < 1$, то имеют место некоторые затраты.

Классические оптимизационные алгоритмы на графах достаточно быстро находят кратчайшие пути, т.е. пути минимального аддитивного веса. С этой целью имеет смысл преобразовать веса графа $G$

$$a_{ij} = \begin{cases} -\ln b_{ij}, & (V_i, V_j) \in E \\ 0, & i = j \\ \infty & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (2)$$

Таким образом, для орграфа валютных транзакций $G = (V, E)$, $E \subset V \times V$, $N = |V|$, $M = |E|$ с матрицей смежности $A = \{a_{ij}\} \in \square^{(N,N)}$ требуется найти ориентированный цикл, или контур, минимального веса

$$C_k = <V_k, V_{i_0}, ..., V_{i_n}, V_k>, \ |C_k| = -\ln P_k = a_{ki_0} + \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{i_{j-1} i_j} + a_{i_n k} \to \min \qquad (3)$$

При этом следует учесть, что некоторые дуги графа заведомо имеют отрицательный вес.

**2. Поиск циклов «минимальных затрат».** Искомый цикл (3) содержится среди $N$ циклов минимального веса $C_i$, проходящих через некоторые фиксированные вершины $V_i$, $i = \overline{1, N}$ Минимизация асимптотической сложности алгоритма может быть выполнена на основе того, что с точки зрения оптимизации валютных транзакций для каждой вершины графа $G$ нам требуется найти не все проходящие через нее ориентированные циклы, а лишь один цикл минимального веса. В свою очередь, для некоторой фиксированной вершины $V_i$, $i = \overline{1, N}$ можно достаточно быстро найти $N-1$ циклов минимального веса $C_{ij}$, $j \in \overline{1, N}$, $j \neq i$, проходящих через фиксированную вершину $V_i$ и некоторую из остальных $N-1$ вершин $V_j$, $j \in \overline{1, N}$, $j \neq i$. Искомый цикл минимального веса $C_i$ (или несколько таких циклов одинакового веса) гарантированно содержатся среди циклов $C_{ij}$. Далее по всем вершинам $V_i$, $i = \overline{1, N}$ среди ранее найденных циклов $C_i$ ищется цикл минимального веса.

Для фиксированной вершины $V_i$, $i = \overline{1, N}$ кратчайшие пути из нее ко всем остальным вершинам $V_j$, $j \in \overline{1, N}$, $j \neq i$ образуют дерево $T_i^{(d)}$, (direct – в прямом направлении). Как правило, поиск множества кратчайших путей между всеми парами вершин, т.е. множества $\{T_i^{(d)}\}$, $i = \overline{1, N}$ для плотно заполненных графов эффективно реализуется алгоритмом Флойда, а для разреженных графов – алгоритмом Джонсона. Аналогично, для фиксированной вершины $V_i$, $i = \overline{1, N}$ кратчайшие пути к ней из всех остальных вершин $V_j$, $j \in \overline{1, N}$, $j \neq i$ образуют подграф

$T_i^{(r)}$ (reverse – в обратном направлении), являющийся деревом с точностью до замены направления дуг на обратные. Множество $\{T_i^{(r)}\}$, $i = \overline{1,N}$ находится поиском кратчайших путей между всеми парами вершин в орграфе, который получается из $G$ заменой направления дуг на обратные, т.е. транспонированием матрицы смежности. Пусть $T_{ij}^{(d)}$ – ветвь дерева $T_i^{(d)}$ от вершины $V_i$ к вершине $V_j$, $j \in \overline{1,N}$, $j \neq i$, а $T_{ij}^{(r)}$ – ветвь подграфа $T_i^{(r)}$ от вершины $V_j$ к вершине $V_i$. Очевидно, искомый цикл минимального веса, проходящий через пару вершин $V_i$ и $V_j$, суть $C_{ij} = T_{ij}^{(d)} \cup T_{ij}^{(r)}$.

Для плотно заполненных графов $M \,\square\, N^2$, а трудоемкость алгоритмов нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин оценивается величиной $\square\, N^3$. Для больших разреженных графов $M \,\square\, N^2 / \log_2 N$, а трудоемкость алгоритмов нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин оценивается величиной $\square\, NM \log_2 N$, и для сильно связных орграфов $M \geq N - 1$. После нахождения кратчайших путей для фиксированной вершины $V_i$, трудоемкость нахождения минимального цикла $C_i$ оценивается сверху величиной $\square\, N$, а трудоемкость нахождения минимальных циклов $C_i$ для всех вершин $V_i$, $i = \overline{1,N}$ – величиной $\square\, N^2$.

Таким образом, трудоемкость алгоритма поиска оптимальных циклов $C_i$, проходящих через все фиксированные вершины $V_i$, $i = \overline{1,N}$ орграфа валютных транзакций определяется трудоемкостью алгоритмов поиска кратчайших путей между всеми парами вершин в орграфе.

Цикл с наименьшим положительным весом определяет минимально возможные затраты при проведении валютных транзакций. Задача о нахождении кратчайших путей становится неразрешимой при достижении в графе цикла с отрицательным весом, и, следовательно, в данном случае будет неприменим предложенный алгоритм, основанный на алгоритмах Флойда и Джонсона. Однако именно отрицательные циклы представляют наибольший интерес при проведении валютных транзакций, т.к. приносят некоторую прибыль.

**3. Поиск циклов «возможных приобретений».** Первая фаза алгоритма Джонсона предполагает преобразование весов дуг графа к неотрицательным значениям на основе алгоритма Беллмана-Форда. Наличие в графе $G$ цикла с отрицательным весом не позволяет выполнить дальнейшее преобразование весов дуг графа. Однако это, т.е. сам факт наличия цикла (циклов) возможных приобретений распознается алгоритмом Беллмана-Форда с асимптотической трудоемкостью $\square\, NM$, т.е. относительно быстро.

Дальнейшее сокращение трудоемкости алгоритмов поиска отрицательных циклов носит полуэвристический характер и основано на том, что очень длинные циклы в графе валютных транзакций плохо реализуемы из-за резкого увеличения вероятностей сбоя, случайных ошибок, а также увеличения общего времени валютных переводов. Данные факторы накладывают серьезное ограничение на длину искомых циклов, что, с теоретической точки зрения, делает асимптотическую сложность не более чем полиномиальной по $N$, но, возможно, очень большой, и желательно так оптимизировать алгоритм, чтобы его асимптотическая сложность была сравнима с асимптотической сложностью алгоритма Джонсона.

Пусть в графе $G=(V,E)$ есть цикл с отрицательным весом. Сопоставим ему граф $\hat{G}=(V,E)$, который получается из $G$ увеличением весов дуг на некоторую величину $a>0$, и матрицей смежности $\hat{A}=\{\hat{a}_{ij}\}\in \mathbb{R}^{(N,N)}$,

$$\hat{a}_{ij}=\begin{cases} a_{ij}+a<\infty, & (V_i,V_j)\in E \\ 0, & i=j \\ \infty & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{4}$$

Связь весов циклов $C=<V_l,V_{i_0},...,V_{i_n},V_l>$ исходного графа и $\hat{C}=<V_l,V_{i_0},...,V_{i_n},V_l>$ преобразованного графа имеет вид

$$|\hat{C}|=|C|+(n+2)a,\ |C|=|\hat{C}|-(n+2)a \tag{5}$$

Т.е. преобразование (4) не меняет результата сравнения весов циклов одинаковой длины, и, если в преобразованном графе $\hat{G}$ вес некоторого цикла был не больше веса некоторого не более длинного цикла, то это будет заведомо справедливо и для аналогичных циклов исходного графа $G$.

Можно полагать, что циклы минимального веса преобразованного графа будут не длиннее циклов минимального веса исходного графа $G$.

Поскольку проверка наличия или отсутствия отрицательных циклов в графе имеет асимптотическую трудоемкость $\sim NM$, с требуемой степенью точности методом деления отрезка пополам можно подобрать такое $a>0$, при котором в преобразованном графе исчезают отрицательные циклы. Трудоемкость этой операции сравнима с трудоемкостью алгоритма Джонсона.

Аналогично п. 2, в преобразованном графе для фиксированной вершины $V_i$, $i=\overline{1,N}$ кратчайшие пути из нее ко всем остальным вершинам $V_j$, $j\in\overline{1,N}$, $j\neq i$ образуют дерево $\hat{T}_i^{(d)}$, а кратчайшие пути к ней из всех остальных вершин $V_j$, $j\in\overline{1,N}$, $j\neq i$ образуют подграф $\hat{T}_i^{(r)}$, являющийся деревом с точностью до замены направления дуг на обратные. Множества $\{\hat{T}_i^{(d)}\}$, $i=\overline{1,N}$ и $\{\hat{T}_i^{(r)}\}$, $i=\overline{1,N}$ находятся алгоритмами Флойда либо Джонсона. Пусть $\hat{T}_{ij}^{(d)}$ – ветвь дерева $\hat{T}_i^{(d)}$ от вершины $V_i$ к вершине $V_j$, $j\in\overline{1,N}$, $j\neq i$, а $\hat{T}_{ij}^{(r)}$ – ветвь подграфа $\hat{T}_i^{(r)}$ от вершины $V_j$ к вершине $V_i$. Искомый цикл минимального веса преобразованного графа, проходящий через пару вершин $V_i$ и $V_j$, суть $\hat{C}_{ij}=\hat{T}_{ij}^{(d)}\cup\hat{T}_{ij}^{(r)}$. Для фиксированной вершины $V_i$ по известным весам $|\hat{C}_{ij}|$ циклов преобразованного графа

$\hat{G}$ аналогично (5) находятся веса $|C_{ij}|$ соответствующих циклов исходного графа $G$, и из них выбирается цикл с наименьшим $|C_{ij}|$. Далее для всех вершин $V_i$, $i=\overline{1,N}$ из ранее найденных циклов выбирается цикл с наименьшим весом по исходному графу.

Таким образом, трудоемкость данного полуэвристического алгоритма сравнима с трудоемкостью классического алгоритма Джонсона.

**4. Сравнение эффективности поиска оптимальных циклов** на основе алгоритмов Флойда и Джонсона. В исследовании были использованы два набора данных (графы): тестовый (test) и коммерческий (prod), охватывающие определенный временной срез (см. таблицу). Для тестового набора данных параметры графа составили: 214646 ребер и 935 вершин, а для коммерческого графа: 139543 ребер и 864 вершины.

**Оценка эффективности алгоритмов**

| Набор данных | Предложенный подход (время и память совпадают) | Оригинальный алгоритм Джонсона (время/память) | |
|---|---|---|---|
| test | $2{,}464e12$ | $4{,}616e13$ | 215581 |
| prod | $1{,}428e11$ | $2{,}532e13$ | 140407 |

Предложенный алгоритм поиска циклов неотрицательного минимального веса в графе валютных транзакций и полуэвристический алгоритм поиска циклов отрицательного минимального веса с некоторым ограничением на длину цикла. Асимптотическая трудоемкость данных алгоритмов сравнима с асимптотической трудоемкостью классических алгоритмов Флойда и Джонсона для поиска кратчайших путей между всеми парами вершин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Buchin K., Knauer C., Kriegel K., Schulz A., & Seidel R.* On the Number of Cycles in Planar Graphs. In G. Lin (Ed.) // Computing and Combinatorics: COCOON 2007 (Lecture Notes in Computer Science. Springer. 2007. Vol. 4598.

2. *Dijkstra E. W.* A note on two problems in connexion with graphs // Numerische mathematik. 1959. Т. 1. № 1. С. 269-271.

3. *Bellman R.* On a routing problem // Quart. Appl. Math. 1958. Т. 16. С. 87-90.

4. *Floyd R. W.* Algorithm 97: Shortest path // Communications of the ACM. 1962. Vol. 5. No. 6.

5. *Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ : пер. с англ. 2-е изд. М. : Изд. дом «Вильямс», 2011. 1296 с.

6. *Johnson D. B.* Finding All the Elementary Circuits of a Directed Graph // SIAM Journal on Computing. 1975. Т. 4. № 1. С. 77-84.

7. *Линев А. И.* Валютная арбитражная операция, как способ получения дохода // Экономика и социум. 2017. № 5-1 (36).

8. *Пакова О. Н., Нехорошева К. И., Побережная Е. В.* Валютные рынки и валютные операции в условиях глобализации // Символ науки: международный научный журнал. 2017. Т. 1. № 1. С. 56-59.