ПРИМЕНЕНИЕ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЛЕВИ И ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Л. Н. Каваленя

Центральный банк Российской Федерации, Москва
E-mail: ln.kavalenya@ya.ru

В статье рассматривается задача нахождения на основе численной оптимизации такой структуры портфеля ценных бумаг, которая будет минимизировать показатель портфельного риска VaR в предположении, что распределение доходности активов относится к классу S(α;β;σ;δ).

APPLICATION OF STABLE LEVY DISTRIBUTIONS AND GENETIC ALGORITHMS FOR SECURITIES PORTFOLIO OPTIMIZATION

L. N. Kavalenya

The article considers the problem of finding, on the basis of numerical optimization, such a securities portfolio structure that will minimize the portfolio risk index VaR under the assuming that the asset yield distribution belongs to class S(α;β;σ;δ).

1 Введение. В 1960-х года Б. Мандельброт [1] выдвинул гипотезу, что распределение доходностей торгуемых на бирже акций описывается т.н. устойчивыми распределениями Леви, включающими Гауссово распределение на правах частного случая ($\alpha = 2, \beta = 0$):

$$\ln\left(\frac{\mathrm{P_t}}{\mathrm{P_{t-1}}}\right) \sim S(\alpha;\beta;\sigma;\delta). \qquad (1)$$

Таким образом, Б. Мандельброт указал на необходимость обобщения портфельной модели Марковица [2] для произвольных значений параметров (α;β;σ;δ).

До настоящего времени данная задача остается нерешенной, что связано с рядом специфических свойств класса $S(\alpha;\beta;\sigma;\delta)$:

1. Распределение Гаусса является единственным из класса устойчивых распределений, которое имеет конечную дисперсию. В общем случае, справедливо равенство:

$$\mathrm{E}|\mathrm{X}|^{\mathrm{p}} = \begin{cases} < \infty, & \text{если } p < \alpha \\ = \infty, & \text{если } \mathrm{p} > \alpha \end{cases} \qquad (2)$$

2. Ковариация двух устойчивых случайных величин (УСВ) определена тоже только для случая $\alpha = 2$

3. Правила сложения УСВ в настоящее время известны только для независимых СВ с общим индексом устойчивости α. Так, если $X_1, X_2, \ldots, X_n$: $X_i \sim S(\alpha;\beta;\sigma;\delta)$, то их сумма $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ будет иметь параметры

УСВ:

$$\alpha = \alpha \tag{3}$$

$$\sigma = (\sigma_1{}^{\alpha} + \sigma_2{}^{\alpha} + \cdots + \sigma_n{}^{\alpha})^{1/\alpha} \tag{4}$$

$$\beta = \frac{(\beta_1\sigma_1{}^{\alpha} + \beta_2\sigma_2{}^{\alpha} + \cdots + \beta_n\sigma_n{}^{\alpha})}{(\sigma_1{}^{\alpha} + \sigma_2{}^{\alpha} + \cdots + \sigma_n{}^{\alpha})} \tag{5}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n \tag{6}$$

4. Аналитических формул, позволяющих определять параметры композиции устойчивых случайных величин с произвольными $\alpha; \beta; \sigma; \delta$ в настоящее время нет как для зависимых, так и для независимых случайных величин [3,4].

Указанные свойства УСВ приводят к необходимости использования иных (нежели σ из модели Марковица) мер портфельного риска и предложения численных методов поиска оптимального портфеля.

Например, может быть использована метрика Value at Risk (VaR), отражающая уровень потерь по портфелю, который с заданной вероятностью не будет превышен. В данной работе рассмотрена задача минимизации портфельного риска VaR в предположении о принадлежности распределения доходности активов к классу S(α;β;σ;δ) на основе т.н. генетических алгоритмов.

2. Постановка математической задачи

Основываясь на содержательной постановке цели работы, можно сформулировать следующую формальную задачу поиска Парето-оптимального множества портфелей ценных бумаг на основе информации об исторической доходности активов.

Введём необходимые обозначения. Пусть портфель $\mathrm{w} = (\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_\mathrm{n})$ состоит из n активов, и доля актива k составляет w_k от величины единичного капитала в начальный момент времени. Для каждого актива k известна его цена $\mathrm{p}_\mathrm{k}(\mathrm{t})$ в конце дискретных периодов времени $\mathrm{t} = 0, \ldots, \mathrm{T}$.

Примем в качестве показателя доходности актива на периоде времени t его логарифмическую доходность:

$$\mathrm{r}_\mathrm{k}(\mathrm{t}) = \ln\left(\frac{\mathrm{p}_\mathrm{k}(\mathrm{t})}{\mathrm{p}_\mathrm{k}(\mathrm{t}-1)}\right) \tag{7}$$

Тогда средняя логарифмическая доходность актива k за время T (историческая доходность) составит:

$$\mathrm{R}_\mathrm{k} = \frac{1}{\mathrm{T}}\ln\left(\frac{\mathrm{p}_\mathrm{k}(\mathrm{T})}{\mathrm{p}_\mathrm{k}(0)}\right). \tag{8}$$

Наряду с показателем доходности определим показатель риска актива как:

$$\mathrm{S}_\mathrm{k} = \mathrm{VaR}_\mathrm{k}\,, \tag{9}$$

где VaR_k представляет собой k%-квантиль устойчивого распределения $S(\mu; \sigma; \alpha; \beta)$, аппроксимирующего эмпирическое распределение доходности актива k за время t на интервале [0,T].

Аналогичным образом введем показатели доходности $\mathrm{R_w(t)}$, исторической доходности $\mathrm{R(w)}$ и риска $\mathrm{S(w)}$ для портфеля ценных бумаг w:

$$\mathrm{R_w(t)} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{r_k(t)w_k}, \tag{10}$$

$$\mathrm{R(w)} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{R_k w_k}, \tag{11}$$

$$\mathrm{S(w)} = \mathrm{VaR(w)}, \tag{12}$$

где $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ — распределение капитала по активам в начальный момент времени, удовлетворяющее условию отсутствия коротких продаж ($w_k \geq 0$):

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1, \tag{13}$$

$$w_k \geq 0 \ \forall k \in \{1,2,..,n\}, \tag{14}$$

$$w_k \leq 1 \ \forall k \in \{1,2,..,n\}. \tag{15}$$

Будем называть портфель λ-оптимальным, если веса $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ таковы, что доставляют наименьшее значение портфельного риска $S(w(\lambda))$ при условии:

$$\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{R_k w_k} = \mathrm{R(w)} = \lambda > 0. \tag{16}$$

Таким образом, параметрическая кривая

$$\begin{cases} \mathrm{r} = \lambda, \\ \mathrm{s} = \mathrm{S(w(\lambda))} \end{cases} \tag{17}$$

задаёт Парето-оптимальное множество портфелей на плоскости «доходность – риск».

3. Эмпирическая база исследования и выбор квантиля VaR

В представленной работе были использованы данные торгов по 626 компаниям, входившим в индекс S&P 500 в течение 2000–2023гг. Из них 358 имели непрерывную историю котировок на рассматриваемом интервале. Для учета фактора дивидендных выплат использовалось т.н. «скорректированные цены закрытия» Adj.Close[1].

Для каждой акции была проведена оценка параметров устойчивого распределения, аппроксимирующего ежедневную доходность в 2000-2023гг. Значения параметров α, характеризующих скорость убывания «хвостов распределения» и β, отвечающего за асимметрию, у большинства бумаг оказались значительно удалены от параметров распределения гаусса (2 и 0 соответственно)-см. рис. 1

[1] Исходные данные о ценах закрытия сформированы на основе запросов к базе Yahoo.Finance

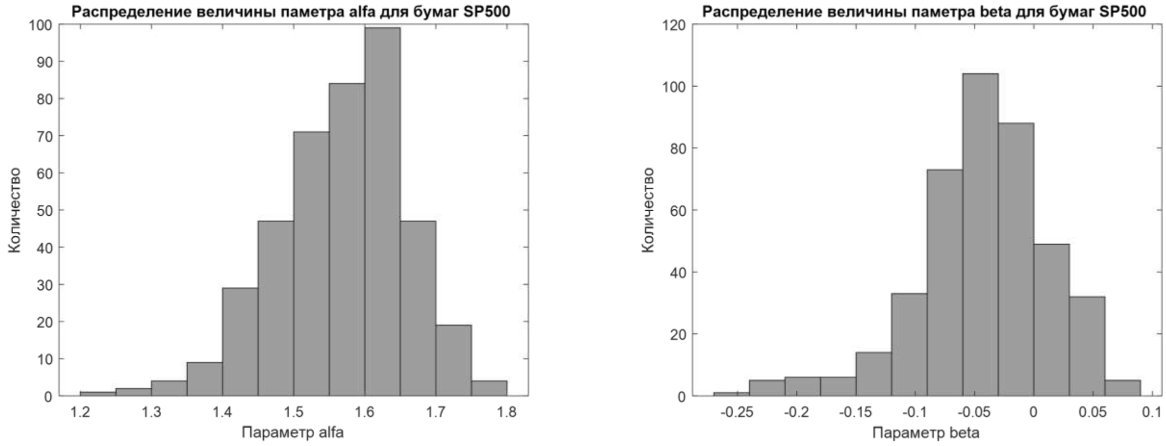


Рис. 1. Оценка параметров устойчивого распределения
дневных доходностей акций, входящих в индекс SP_500

В целом, анализ показал очень высокую точность аппроксимации фактических данных, в особенности в области малых отклонений случайной величины от своего среднего значения. В качестве типичного примера можно привести эмпирическую и аналитическую функции распределения однодневной доходности для акции AAPL (Apple):

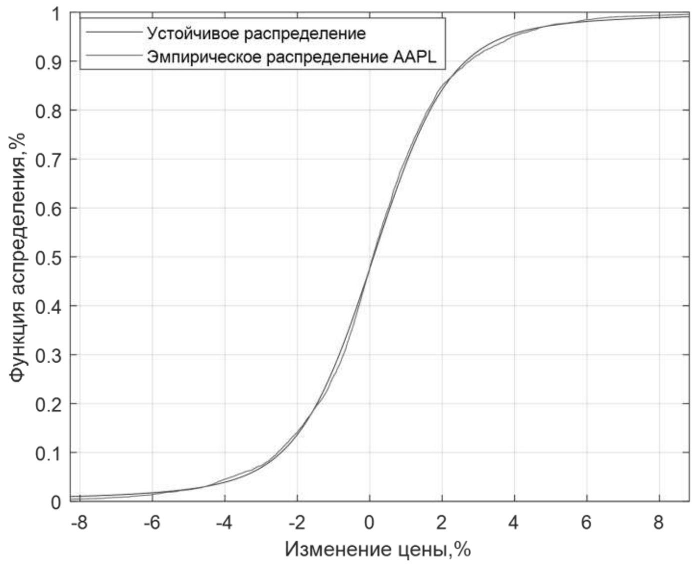


Рис. 2 Аппроксимации распределения
дневной доходности устойчивым распределением
на примере Apple в 2000-2019гг.
(Параметры распределения S[1.58,0,0.127,0.001])

В то же время, у большинства бумаг было обнаружено систематическое расхождение распределений в области экстремальных значений (менее 3% наблюдений): хвосты эмпирического распределения спадают быстрее, чем в теоретическом случае:

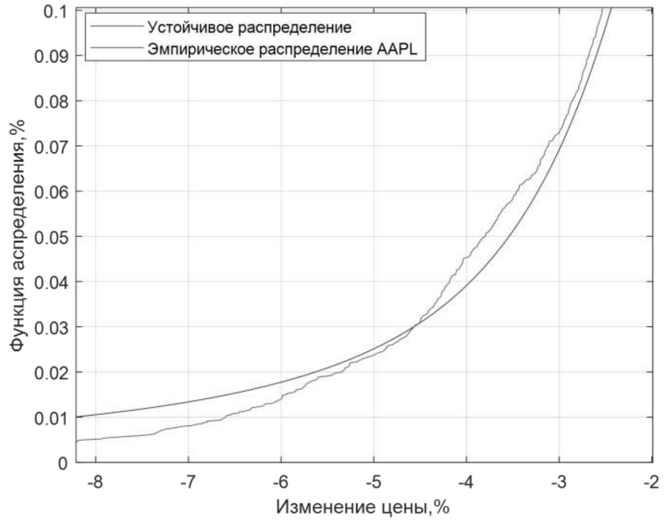


Рис.3 Распределение 10% самых больших ежедневных падений AAPL

Данный эффект является существенным в свете необходимости выбора оптимизируемого квантиля. Наиболее часто используемыми на практике выступают VaR_95%, VaR_99%, VaR_99,9% [5]. При этом анализ показал, что минимальный квантиль, при котором значения эмпирической и аппроксимирующей функции распределения совпадают, для большинства акций выборки лежит в интервале 2-4%. Например, для приведенного на рис.2 и 3 распределении доходности акции Apple, оптимальным квантилем выступает 3%, что соответствует падению котировки на -4.5%. Распределение величины оптимального квантиля для всех акций приведено на рис. 4.

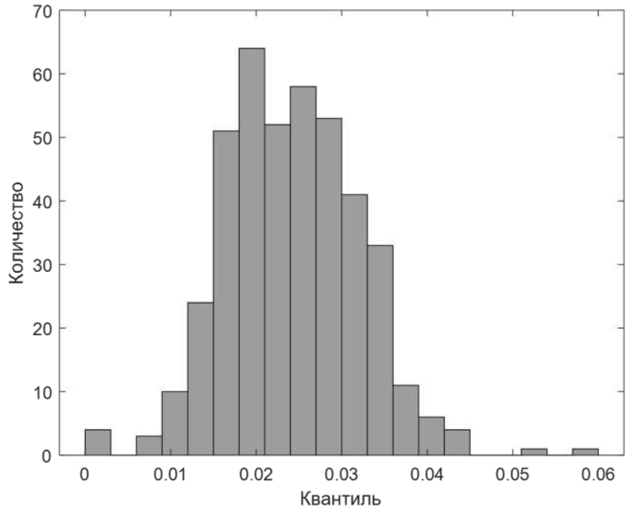


Рис. 4. Квантиль, при котором эмпирическая и устойчивая функции распределения вероятностей совпадают

Таким образом без переопределения значений функции устойчивого распределения в области экстремальных значений (об использовании т.н. «усеченных распределений Леви см. [6]) оптимальным значением целевого VaR выступает 96-98%. Основываясь на этих оценках в настоящей работе в качестве показателя риска, использовался VaR_97%.

4. Оптимизация портфеля для частных случаев

С учетом приведенных во введении свойств устойчивых распределений можно разбить исходную задачу на 3 случая

1. Все образующие активы имеют общий индекс устойчивости $\alpha=2$
2. Активы имеют общие для всех параметры устойчивости $1<\alpha<2$ и скоса $-1 \leq \beta \leq 1$
3. Активы имеют произвольные параметры α и β

Случаи 1 и 2 являются вырожденными и как показано ниже, могут быть эффективно решены методами соответственно квадратического и линейного программирования.

Случай 1 с $\alpha=2$ эквивалентен допущению о нормальном распределении доходностей образующих портфель активов $S(2; 0; \sigma; \delta)$. Тогда, используя свойство линейной зависимости квантиля центрированного нормального распределения и его среднеквадратического отклонения:

$$N(\sigma, 0)^{-1} = \sigma N(1,0)^{-1} \tag{18}$$

задача поиска портфеля с минимальным показателем VaR может быть сведена к задаче минимизации дисперсии доходности портфеля (Модель Марковица [2]).

Случай 2 не включает активы с $\alpha=1$, которые соответствуют распределению Коши $S(1; 0; \sigma; \delta)$, формально не имеющим не только дисперсии, но и математического ожидания.

Согласно свойствам УСВ (3-6) любая выпуклая комбинация УСВ с общими параметрами α, β будет принадлежать тому же подклассу. Это свойство позволяет свести поиск портфеля с минимальным значением VaR к эквивалентной задаче поиска портфеля с минимальным среднелинейным отклонением доходности:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{n} w_k \left|(r_k(t) - R_k)\right| \rightarrow min \tag{19}$$

Приведенная задача (19) минимизации суммы модулей отклонений представляет собой задачу кусочно-линейного программирования [7, стр.439], которая, в свою очередь, может быть сведена к задаче линейного программирования после следующих операций:

Введем T дополнительных (фиктивных) знакоположительных переменных $y_t > 0$, соответствующих каждому наблюдению в исходном временном ряде.

Для всех T компонент оптимизируемого функционала (19) вида:

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \left|(r_k(t) - R_k)\right| \tag{20}$$

(отражающих модуль отклонения доходности в данном периоде) поставим в соответствие следующую пару неравенств:

$$\sum_{k=1}^{n}(r_k(t)-R_k)w_k \le +y_t \tag{21}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(r_k(t)-R_k)w_k \le -y_t$$

С учетом представленных замен переменных задача поиска портфеля с минимальным значением среднелинейного отклонения доходности (в англоязычной литературе Mean-Absolut Portfolio) принимает вид стандартной задачи линейного программирования с ограничениями в форме неравенств:

$$\sum_{t=1}^{T} y_t \to min$$

$$\sum_{k=1}^{n}(r_k(t)-R_k)w_k \le +y_t\ \forall t \in \{1,2,..,T\}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(r_k(t)-R_k)w_k \le -y_t\ \forall t \in \{1,2,..,T\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} R_k w_k = \lambda \tag{22}$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$$

$$w_k \ge 0\ \forall k \in \{1,2,..,n\}$$

$$w_k \le 1\ \forall k \in \{1,2,..,n\}$$

$$y_t \ge 0\ \forall t \in \{1,2,..,T\}$$

5. Оптимизация портфеля с произвольными α и β с помощью генетических алгоритмов

Задача нахождения допустимого портфеля с минимальным VaR в случае произвольных значений параметров α, β у образующих активов характеризуется рядом важных особенностей:

1. Пространство решений имеет высокую размерность (для практической ценности количество активов должно исчисляться сотнями)
2. Целевая функция является нелинейной
3. Нет аналитических оценок для градиента целевой функции
4. Наличие большого количества локальных минимумов

Данные обстоятельства накладывают значительные ограничения на выбор метода поиска оптимального решения. Одним из возможных вариантов выступает использование т.н. генетических алгоритмов. Данный метод стохастического поиска является универсальным, применимым к максимально широкому кругу задач поскольку требует только вычисления целевой функции.

Приведем краткую интерпретацию базовых понятий ГА в рамках решаемой задачи портфельной оптимизации:

Таблица 1

Некоторые понятия, используемые в генетических алгоритмах

Характеристика ГА	**Значение**	**Интерпретация**
Хромосома (особь)	вектор, представляющий возможное решение	распределение капитала по активам: $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$
Ген	фиксированный элемент в хромосоме	доля капитала в соответствующем активе w_i
Популяция	множество хромосом	множество портфелей
Функция приспособленности (fitness function)	функция, подлежащая оптимизации	3%-квантиль устойчивого распределения $S(\mu; \sigma; \alpha; \beta)$, аппроксимирующего эмпирическое распределение доходности портфеля $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

При большом разнообразии применяемых эвристических методов [8, 9], в своей основе любой ГА состоит в итеративном применении к популяции следующих т.н. генетических операторов:

- Оператор отбора (Selection Functon): задает правило выделения «родительских» хромосом(особей), принимающих участие в формировании новых хромосом для следующей популяции
- Оператор скрещивания (Crossover Functon): задает порядок получения дочерних хромосом на основе родительских
- Оператор мутации (Mutation Functon): обеспечивает случайное изменение одной или нескольких генов в хромосоме. Мутация используется для выведения решения из локального экстремума целевой функции

Полученные на основе приведенной схемы дочерние хромосомы сравниваются по величине целевой функции с родительскими и формируют новую популяцию и цикл ГА завершается.

Используя библиотеку Matlab Genetic Algorithm был реализован алгоритм генетического поиска оптимального для фиксированного уровня доходности со следующими параметрами:

1. Хромосома представлена в виде вектора с ограничениями согласно формулам (13-15)
2. Исходная популяция образована на основе равномерного распределения в пространстве допустимых решений и дополнена двумя эталонными портфелями, полученными при оптимизации исторического среднеквадратического и среднелинейного отклонений (см.п.4).
3. Размер популяции определен на основе экспертных оценок в 200 шт.
4. Расчет целевой функции осуществлялся на основе вспомогательной про-

граммы, оценивающей квантиль устойчивого распределения доходности портфеля при данном решении $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

5. Оператор скрещивания хромосом- “Arithmetic”, при котором дочерние хромосомы представляют собой простое среднее родительских. Параметр вероятности скрещивания 0.8

6. Оператор мутации: “Mutationadaptfeasible” – единственная из встроенных функций мутации Matlab, которая совместима с линейными ограничениями на переменные. Алгоритм «адаптивной мутации» при выборе направления и величины случайного изменения гена учитывает результат мутации на прошлых итерациях.

7. Использовалась «стратегия элитарности», предполагающей переход из старой популяции в новую двух хромосом с лучшим показателем целевой функции

8. Применялся т.н. гибридный ГА: после итерации ГА осуществляется локальная оптимизация каждой из хромосом на основании встроенной функции Matlab для поиска минимума нелинейной функции при линейных ограничениях fmincon.

Помимо приведенной задачи оптимизации скалярной целевой функции, библиотека Matlab Genetic Algorithm позволяет проводить многокритериальную оптимизацию, что обеспечивает поиск одновременно всей Парето-оптимальной границы допустимых портфелей. Отличительными особенностями данного генетического алгоритма выступают:

1. Скалярная функция приспособленности заменяется рангом, отражающим близость хромосомы к Парето-границе (ей присваивается ранг 1)

2. Отсутствует линейное ограничение на веса целевой функции, отражающее требуемую фиксированную доходность портфеля.

3. Отсутствуют элитарные хромосомы, переходящие в дочернюю популяцию.

4. Популяция дополняется сразу всеми портфелями, Парето-эффективными с точки зрения среднеквадратического и среднелинейного отклонения доходности.

5. Специфический оператор селекции родительских хромосом: “Selectiontournament”, при котором проводится серия случайных выборок нескольких хромосом (т.н. турниров) и лучшие по рангу особи формируют множество родительских хромосом

6. Оператор скрещивания получает дополнительный параметр 'DistanceFcn', определяющий алгоритм скрещивания родительским особей. Вариант 'genotype'-объединяет хромосомы, близкие по структуре $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, в то время как 'phenotype'-объединяет в родительские пары хромосомы, близкие по рангу.

7. Предельное количество генераций установлено 100 по сравнению с 30 в скалярном случае

На основании приведенных выше скалярного и многокритериального генетических алгоритмов, а также с использованием линейного и квадратического программирования для поиска первого приближения был построен комбинированный ГА, осуществляющий поиск Парето-оптимального портфеля и включающий в себя следующие блоки:

1. Нахождение Парето-границ для среднеквадратической (MV) и среднелинейной (MAD) функции риска.

2. Нахождение опорных точек на границе Парето с помощью гибридного генетического алгоритма со скалярной целевой функцией риска и линейным ограничением на доходность.

3. Формирование начальной популяции хромосом из множеств, полученных на этапе 1 и 2 и равномерно распределенных случайных хромосом.

4. Нахождение Парето-оптимального множества портфелей на основе генетического алгоритма с бикритериальной целевой функцией доходность – риск и начальной популяциии согласно п.3.

6. Результаты численной оптимизации

Алгоритм генетической оптимизции был предварительно протестирован на решении эталонных задач поиска MV и MAD-оптимальных портфелей ценных бумаг, что позволило выявить ряд практических недостатков данного метода, существенных при интерпретации его результатов.

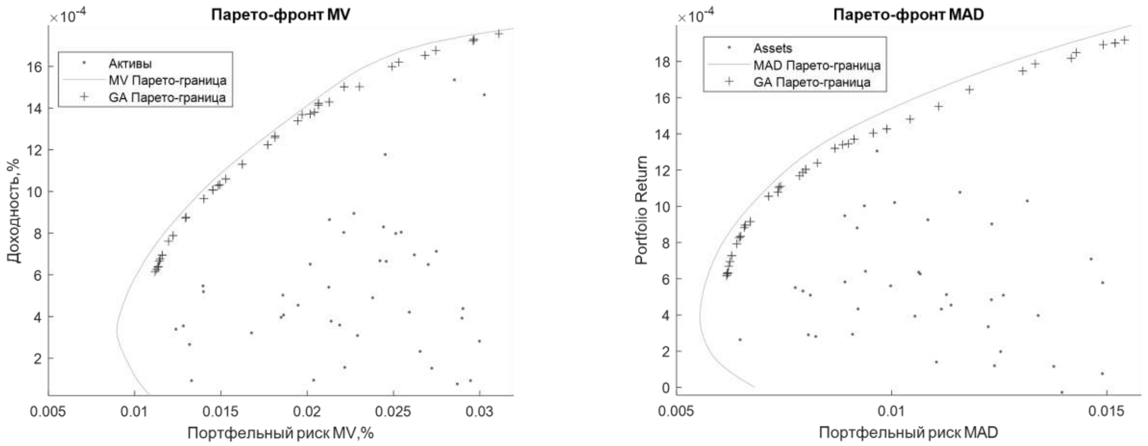
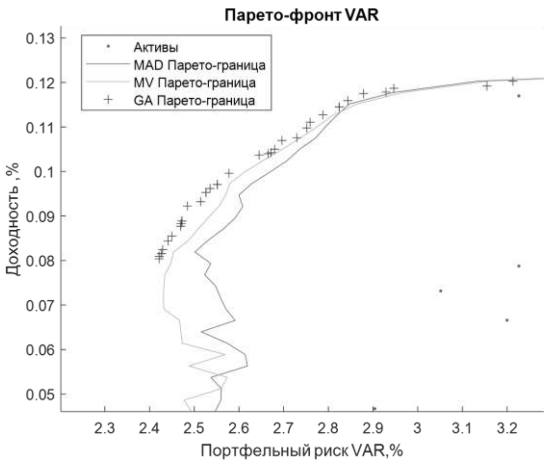


Рис. 5. Применение генетического алгоритма
для решения задачи MV и MAD-оптимизации

Приведенные на рис. 5 результаты подтвердили указанную в п.5 возможность нахождения окрестности истинной Парето-границы для любой целевой функции риска портфеля. При этом точные значения структуры оптимальных портфелей не достигаются ввиду сохранения минимального веса в генах, которые при линейной и квадратической оптимизации получают нулевые значения. Данный недостаток ГА может быть нивелирован увеличением количества тактов оптимизации.

Применение ГА для поиска VaR-оптимальных портфелей осуществлялось для различных выборок ценных бумаг (от 10 до 100) на интервалах доходности 1, 5 и 20 дней. Количество отсчетов принималось не менее 100 для корректной оценки параметров устойчивого распределения.

Анализ полученных результатов показал, что использование ГА может значительно снизить метрику VaR по сравнению с среднеквадратической и среднелинейной оптимизацией портфеля, выступавшими в роли эталонных.



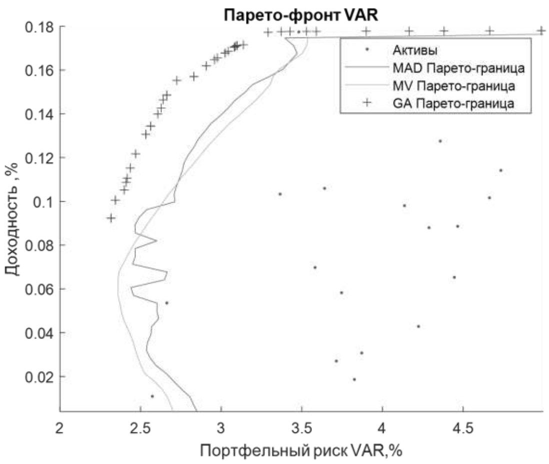


Рис. 6. Парето-границы VaR за 1 торговый день, полученные при оптимизации среднеквадратического (MV) и среднелинейного (MAD) отклонений доходности, а также генетическим алгоритмом (GA_Optimal).
Слева: для портфеля из 50 случайных акций из SP_500.
Обучающая выборка- 1000 торговых сессий после 15/07/2020.
Справа: для портфеля из 100 случайных акций из SP_500.
Обучающая выборка- 500 торговых сессий после 3/05/2010.

Зачастую эталонные Парето-границы вообще не образовывали выпуклого множества при отображении их на плоскость VaR-Return:

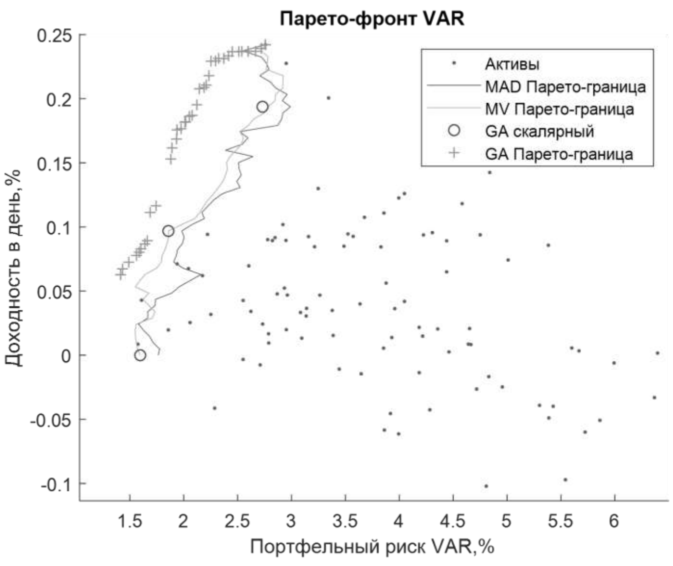


Рис. 7. Парето-границы VaR за 1 торговый день,
полученные при оптимизации среднеквадратического (MV) и среднелинейного (MAD) отклонений доходности, а также генетическим алгоритмом (GA_Optimal).
Для портфеля из 100 случайных акций из SP_500.
Обучающая выборка- 300 торговых сессий после 27/09/2010

Наблюдаемый эффект объясняется низкой устойчивостью оценок среднеквадратического и среднелинейного отклонений для небольших выборок случайных величин, характеризующихся т.н. «толстыми хвостами» и асимметрией плотности. В то же время восстановление аналитической функции распределения, которое осуществляет представленный ГА, позволяет оценивать вероятность событий, которые отсутствуют в обучающей выборке, либо представлены недостаточно.

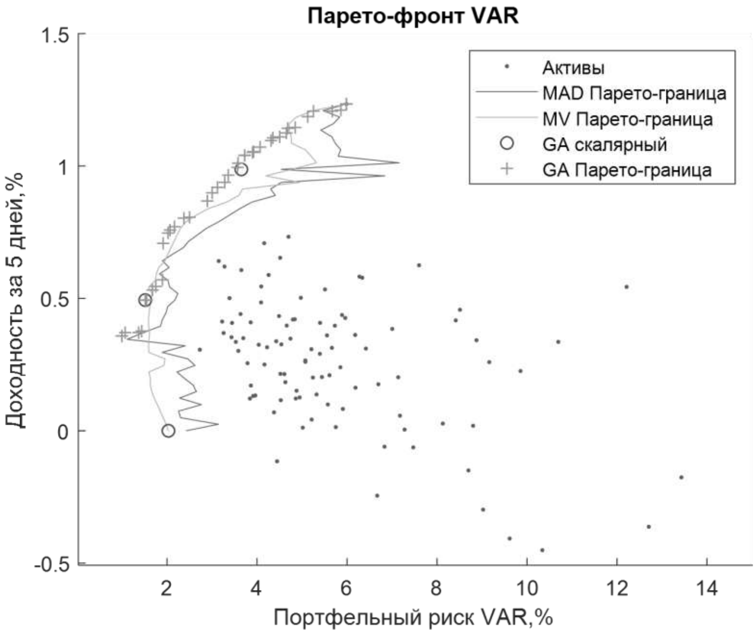


Рис. 8. Парето-границы VaR за 5 торговых дней,
полученные при оптимизации на основе среднеквадратического (MV)
и среднелинейного (MAD) отклонений доходности,
а также генетическим алгоритмом (GA_Optimal).
Для портфеля из 100 случайных акций из SP_500.
Обучающая выборка- 500 торговых сессий после 17/11/2017.

Отметим, что с увеличением количества отсчетов в обучающей выборке наблюдалось сближение эффективных Парето-границ, полученных всеми тремя способами.

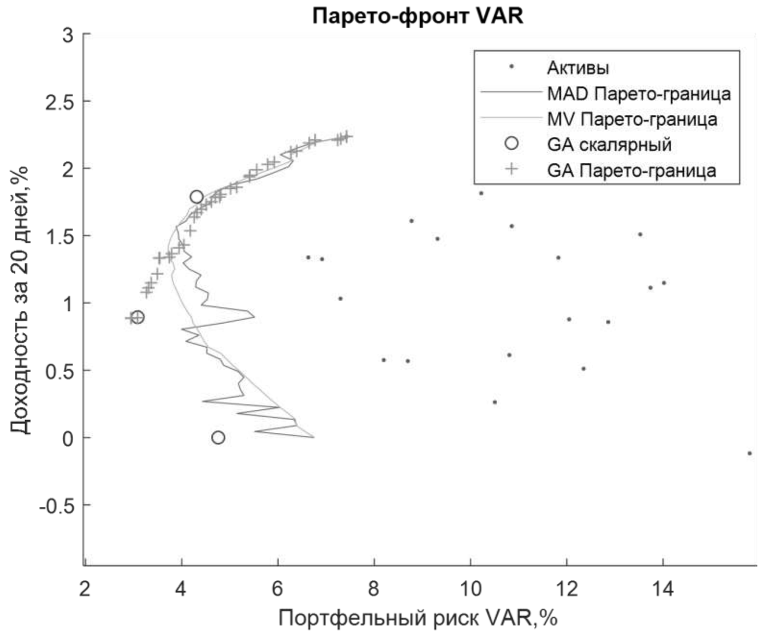


Рис. 9. Парето-границы VaR за 20 торговых дней,
полученные при оптимизации на основе
среднеквадратического (MV) и среднелинейного (MAD)
отклонений доходности, а также генетическим алгоритмом (GA_Optimal).
Для портфеля из 25 случайных акций SP_500.
Обучающая выборка- 2000 торговых сессий после 17/11/2017

Заключение.

В ходе выполнения поставленной задачи портфельной оптимизации, были получены следующие результаты:

1. На широкой выборке ценных бумаг было проведено тестирование устойчивых распределений Леви для целей аппроксимации доходностей биржевых акций и сделан вывод о корректности их использования.

2. Получена оценка значений квантиля распределения возможных потерь (VaR), которые могут быть использованы при оптимизации портфеля на основе устойчивых распределений (96-98%).

3. Для общего случая с произвольными значениями индексов устойчивости и скоса проведена оптимизация портфеля на основе комбинированного генетического алгоритма. Осуществленные численные эксперименты показали возмож-ность использования данного метода для поиска VaR-оптимального портфеля ценных бумаг.

4. Вместе с тем, генетический алгоритм продемонстрировал ряд недостатков, присущих алгоритмам стохастического поиска. Так, несмотря на эффективное использование ГА параллельных вычислений, успешное решение поставленной задачи было получено только для ограниченного количества акций (до 100). Отметим, что алгоритм оптимизации среднелинейного отклонения показал возможность решения задачи для всех 626 акций с использованием всей истории торгов (5974 наблюдения) за несущественное время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mandelbrot B., Taylor H.* On the distribution of stock price differences // Operations research. 1967. 15 (6). P. 1057-1062.

2. *Markowitz H.* Portfolio selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7. No. 1 P. 77-91.

3. *Rachev T. S., Menn C., Fabozzi F.* Fat-tailed and skewed asset return distributions / John Wiley & Sons, 2005.

4. *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable non-Gaussian random processes / Stochastic models with infinite variance. Chapman & Hall, 1994.

5. *Дробыш И. И.* Современные методы расчета величины Value-at-Risk при оценке рыночных рисков // Труды института системного анализа РАН. 2018. Т. 68. № 3. С. 51-62.

6. *Мантенья Р. Н., Стенли Х. Ю.* Введение в эконофизику / Перевод с английского В. И. Гусева. М. : Либроком, 2007. 192 с.

7. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Новые направления в линейном программировании / М. : «Советское радио», 1966. 524 с.

8. *Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М.* Генетические алгоритмы : учебное пособие. 2-е изд. / М. : Физматлит, 2006. 368 с.

9. *Панченко Т. В.* Генетические алгоритмы: учебно-методическое пособие / под ред. Ю. Ю. Тарасевича. Астрахань : Астраханский университет, 2007. 87 с.