Задания компьютерного практикума
по курсу «Динамический хаос»

Часть 1

1. Фазовые портреты двумерных отображений. Для приведенных ниже систем постройте фазовые портреты. Отдельным цветом на них выделите аттракторы. Меняя параметры, пронаблюдайте как периодические, так и хаотические режимы.

а) Отображение Эно
$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + b y_n, \quad y_{n+1} = x_n.$$

б) Отображение Икеды
$$z_{n+1} = A + B z_n \cdot \exp\left(i\left|z_n\right|^2\right),$$ где z — комплексная величина.

в) Отображение Холмса
$$x_{n+1} = a - b x_n + x_n^3 - c y_n, \quad y_{n+1} = x_n.$$

г) Отображение прыгающего шарика
$$v_{n+1} = (1-\varepsilon) v_n + k \sin\phi_n, \quad \phi_{n+1} = \phi_n + v_{n+1}, \ \bmod 2\pi.$$

д) Отображение Заславского
$$\phi_{n+1} = x_n + \Delta + k \sin\phi_n + d p_n, \ \bmod 2\pi \quad p_{n+1} = d p_n + k \sin\phi_n.$$

2. Фазовые портреты потоковых систем. Для приведенных ниже систем постройте фазовые портреты. Отдельным цветом на них выделите аттракторы. Меняя параметры, пронаблюдайте как периодические, так и хаотические режимы.

а) Система Ресслера
$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + a y, \quad \dot{z} = b + (x - r) z.$$

б) Система Лоренца
$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = r x - y - x z, \quad \dot{z} = -b z + x y.$$

в) Генератор с инерционной нелинейностью
$$\dot{x} = m x + y - x z, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -g x + 1(x) x^2,$$ где $1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

г) Генератор Кислова-Дмитриева
$$T\dot{x} + x = F(z), \quad \dot{y} = x - z, \quad \dot{z} = y - z/Q,$$ где $F(z) = M z \exp\left(-z^2\right)$.

д) Генератор Кияшко–Пиковского–Рабиновича
$$\dot{x} = 2 h x + y - g z, \quad \dot{y} = -x, \quad \varepsilon\dot{z} = x - f(z),$$

где $f(z) = 8.592 z - 22 z^2 + 14.408 z^3$.

3. Бифуркационные деревья одномерных отображений. Для приведенных ниже систем постройте бифуркационное дерево. Укажите на нем области периодических и хаотического режимов.

а) Кубическое отображение $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$

б) Отображение Гласса $\theta_{n+1} = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin\theta_n + C}{\cos\theta_n}\right) - T$

в) Отображение окружности $x_{n+1} = x_n + \Omega + k\sin 2\pi x_n$

г) Отображение «косинуса» $x_{n+1} = \lambda\cos x_n + \phi$

д) Логистическое отображение $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$

4. Показатели Ляпунова аттракторов. Для приведенных ниже систем вычислите спектр показателей Ляпунова периодического и хаотического режимов. Объясните их отличия.

а) Отображение Эно
$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + by_n,$$
$$y_{n+1} = x_n.$$

б) Отображение Икеды $z_{n+1} = A + Bz_n \cdot \exp\left(i|z_n|^2\right)$, где z — комплексная величина.

в) Отображение Холмса
$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3 - cy_n,$$
$$y_{n+1} = x_n.$$

г) Отображение прыгающего шарика
$$v_{n+1} = (1-\varepsilon)v_n + k\sin\phi_n,$$
$$\phi_{n+1} = \phi_n + v_{n+1}, \ \mod 2\pi.$$

д) Отображение Заславского
$$\phi_{n+1} = x_n + \Delta + k\sin\phi_n + dp_n, \ \mod 2\pi$$
$$p_{n+1} = dp_n + k\sin\phi_n.$$

5. Корреляционная размерность аттракторов. Для приведенных ниже систем вычислите корреляционную размерность периодического и хаотического режимов. Объясните их отличия.

а) Система Ресслера
$$\dot{x} = -y - z,$$
$$\dot{y} = x + ay,$$
$$\dot{z} = b + (x - r)z.$$

б) Система Лоренца
$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$
$$\dot{z} = -bz + xy.$$

в) Генератор с инерционной нелинейностью
$$\dot{x} = mx + y - xz,$$
$$\dot{y} = -x,$$
$$\dot{z} = -gx + 1(x)x^2,$$
где $1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

г) Генератор Кислова-Дмитриева
$$T\dot{x} + x = F(z),$$
$$\dot{y} = x - z,$$
$$\dot{z} = y - z/Q,$$
где $F(z) = Mz\exp\left(-z^2\right)$.

д) Генератор Кияшко–Пиковского–Рабиновича

$$\dot{x} = 2hx + y - gz,$$
$$\dot{y} = -x,$$
$$\varepsilon\dot{z} = x - f(z),$$

где $f(z) = 8.592z - 22z^2 + 14.408z^3$.

Часть 2

1. Осцилляторы с импульсным возбуждением. Напишите программу, решающую дифференциальное уравнение для представленных ниже систем в промежутке между импульсами. Используя условие скачка скорости в момент действия импульса на величину, равную амплитуде воздействия, получите программу, строящую сечение Пуанкаре. С ее помощью постройте карту динамических режимов на плоскости амплитуда – период следования импульсов. Напишите программу, которая с помощью щелчка мыши на карте режимов строит фазовый портрет системы. Пронаблюдайте характерные режимы и их метаморфозы. Объясните особенности фазовых портретов, обусловленные импульсным характером воздействия. Сравните полученную карту с картой двумерной аппроксимации соответствующей системы. Укажите области пространства параметров, в которых двумерная аппроксимация адекватно описывает динамику потоковой системы.

а) Осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x + \beta x^3 = C\sum\delta(t - nT).$$

Двумерное отображение (аппроксимация)

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp\left(i\left(\left|z_n\right|^2 + T\right)\right),$$

где $A = C\sqrt{\dfrac{3\beta}{8}\cdot\dfrac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma}}$ и $B = e^{-\gamma T/2}$. Здесь z — комплексная переменная.

б) Осциллятор ван дер Поля

$$\ddot{x} - \left(\lambda - x^2\right)\dot{x} + x = B\sum\delta(t - nT)$$

Двумерное отображение (аппроксимация)

$$z_{n+1} = \frac{z_n e^{\lambda T/2 - iT}}{\sqrt{1 + \left|z_n\right|^2 \dfrac{e^{\lambda T} - 1}{4\lambda}}} + iB.$$

Здесь z — комплексная переменная.

2. Многообразия седловых точек и гомоклиническая структура. Создайте программу, которая строит устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки для отображения Эно

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + by_n,$$
$$y_{n+1} = x_n.$$

Алгоритм может выглядеть следующим образом. В очень малой окрестности неподвижной точки выбирается случайным образом стартовая точка, которая подвергается последовательным итерациям. Затем процедура повторяется для другой стартовой точки и т.д. В результате на экране компьютера прорисуется неустойчивое многообразие. Чтобы построить устойчивое многообразие, необходимо реализовать ту же процедуру, итерируя отображение в обратном времени. Для реализации этого метода необходимо очень точно знать координаты неподвижной точки. Если их не удается определить аналитически, то предварительно необходимо организовать соответствующий численный поиск с помощью метода Ньютона.

Пронаблюдайте трансформацию многообразий при вариации параметров. Зафиксируйте момент образования гомоклинической структуры и пронаблюдайте ее эволюцию.

3. Сечение Пуанкаре и метод Эно. Создайте программу, позволяющую строить сечения Пуанкаре для представленных ниже трехмерных потоков. Для определения координат точки пересечения с секущей плоскостью используйте метод Эно. Получите вид аттракторов в сечении Пуанкаре и пронаблюдайте их эволюцию при вариации параметров: каскад удвоений периода, хаотические аттракторы, аттракторы, отвечающие «островкам устойчивости» в хаотической области. Используя полученную программу и программу построения карт динамических режимов, постройте карты для трехмерных потоков.

а) Система Ресслера

$$\dot{x} = -y - z,\quad \dot{y} = x + ay,\quad \dot{z} = b + (x - r)z.$$

б) Система Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x),\quad \dot{y} = rx - y - xz,\quad \dot{z} = -bz + xy.$$

в) Генератор с инерционной нелинейностью

$$\dot{x} = mx + y - xz,\quad \dot{y} = -x,\quad \dot{z} = -gx + 1(x)x^2,\qquad \text{где } 1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

г) Генератор Кислова-Дмитриева

$$T\dot{x} + x = F(z),\quad \dot{y} = x - z,\quad \dot{z} = y - z/Q,\qquad \text{где } F(z) = Mz\exp\left(-z^2\right).$$

д) Генератор Кияшко–Пиковского–Рабиновича

$$\dot{x} = 2hx + y - gz,\quad \dot{y} = -x,\quad \varepsilon\dot{z} = x - f(z),$$

где $f(z) = 8.592z - 22z^2 + 14.408z^3$.

4. Карта ляпуновского показателя для одномерных отображений. Составьте программу, вычисляющую ляпуновский показатель одномерного отображения. При помощи этой программы постройте карту ляпуновских показателей на плоскости параметров отображения, окрашивая каждую точку плоскости в определенный оттенок серого цвета в соответствии со значением ляпуновского показателя в ней. Рекомендуется для отрицательных значений показателя брать тем более темный цвет, чем больше его модуль, так что белый цвет будет соответствовать нулевому показателю, а черный — очень большим отрицательным значениям. Диапазон изменения параметров подберите самостоятельно, чтобы зафиксировать интересные особенности динамики (удвоения периода, хаос и др.). Укажите (если есть) линии циклов максимальной устойчивости, бифуркаций удвоения периода, области хаоса, квазипериодических движений.

а) Кубическое отображение $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$

б) Отображение Гласса $\theta_{n+1} = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sin\theta_n + C}{\cos\theta_n}\right) - T$

в) Отображение окружности $x_{n+1} = x_n + \Omega + k\sin 2\pi x_n$

г) Отображение «косинуса» $x_{n+1} = \lambda\cos x_n + \phi$

д) Логистическое отображение $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$

5. Спектр ляпуновских показателей двумерных отображений. Создайте программу, вычисляющую спектр ляпуновских показателей представленных ниже двумерных отображений. Используя эту программу, постройте график зависимости этих показателей от одного из параметров.

а) Отображение Эно
$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + b y_n,$$
$$y_{n+1} = x_n.$$

б) Отображение Икеды $z_{n+1} = A + Bz_n \cdot \exp\left(i\left|z_n\right|^2\right)$, где z — комплексная величина.

в) Отображение Холмса
$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3 - cy_n,$$
$$y_{n+1} = x_n.$$

г) Отображение прыгающего шарика
$$v_{n+1} = (1-\varepsilon)v_n + k\sin\phi_n,$$
$$\phi_{n+1} = \phi_n + v_{n+1}, \ \mathrm{mod}\, 2\pi.$$

д) Отображение Заславского
$$\phi_{n+1} = x_n + \Delta + k\sin\phi_n + dp_n, \ \mathrm{mod}\, 2\pi$$
$$p_{n+1} = dp_n + k\sin\phi_n.$$