

Задания компьютерного практикума по курсу «От порядка к хаосу»

Задача 1. Переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода

В этой задаче исследуется динамика логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$.

1.1. Постройте итерационные диаграммы, иллюстрирующие переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Также построьте итерационную диаграмму точно в критической точке и покажите, что она обладает фрактальной структурой. Для этого вырежьте небольшой кусок итерационной диаграммы в окрестности точки $x = 0$ и увеличьте его.

1.2.

а) Постройте бифуркационное дерево и продемонстрируйте на нем скейлинг в окрестности точки ($x = 0$, $\lambda = \lambda_{cr}$).

б) Постройте график зависимости ляпуновского показателя от параметра и продемонстрируйте на нем скейлинг в окрестности точки $\lambda = \lambda_{cr}$.

Задача 2. Переход к хаосу через перемежаемость

В этой задаче исследуется динамика логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$.

2.1. Пронаблюдайте переход к хаосу через перемежаемость при выходе из окна периода 3 в сторону уменьшения параметра λ (начните с $\lambda = 1.76$; граница окна $\lambda = 1.75$). Для этого построьте графики зависимости динамической переменной x от дискретного времени n и наблюдайте их эволюцию при изменении параметра λ . Укажите ламинарные и турбулентные стадии.

2.2. Составьте программу для автоматического подсчета длительности ламинарных стадий и продемонстрируйте, что характерная длительность ламинарных стадий растет при приближении к критической точке по степенному закону. Оцените показатель степени и сравните с теоретическим значением.

Задача 3. Переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения

В этих задачах исследуется динамика отображения окружности

$$x_{n+1} = x_n + \Omega + \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n \pmod{1}.$$

3.1. Постройте карту динамических режимов. Укажите области периодических, квазипериодических и хаотических режимов. Постройте соответствующие итерационные диаграммы.

3.2. Постройте так называемую «чертову лестницу», дающую зависимость числа вращения от параметра Ω . Обсудите эволюцию ее структуры при увеличении параметра K от 0 до 1.

3.3.

а) Постройте график зависимости ляпуновского показателя от параметра Ω вдоль критической линии $K = 1$. Пр продемонстрируйте на этом графике скейлинг в окрестности точки $\Omega = (\sqrt{5} - 1)/2$, известной как «золотое сечение» ($\Omega = 0.60666\dots$).

б) Постройте «чертову лестницу» для $K = 1$. Пр продемонстрируйте на ней скейлинг в окрестности точки, соответствующей иррациональному числу вращения $\Omega = 0.60666\dots$. Идентифицируйте ступеньки этой лестницы, отвечающие аппроксимациям «золотого сечения» при помощи чисел Фибоначчи.