Рождение устойчивых орбит в системе лоренцевского типа при положительной седловой величине: аналитические результаты*

Н. В. Барабаш[1,2]✉, *В. Н. Белых*[1,2], *И. В. Белых*[3]

[1]Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского
[2]Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород
[3]Государственный университет Джорджии, Атланта, США
✉ barabash@itmm.unn.ru

Рассматривается кусочно-гладкая динамическая система лоренцевского типа, составленная из трёх систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1] A_s, A_l, и A_r:

$$
A_s: \begin{array}{l} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -\alpha y, \\ \dot{z} = -\nu z, \end{array}
$$

$$
A_l: \begin{array}{l} \dot{x} = -\lambda(x+1) + \omega(z-b), \\ \dot{y} = -\delta(y+1), \\ \dot{z} = -\omega(x+1) - \lambda(z-b), \end{array} \qquad A_r: \begin{array}{l} \dot{x} = -\lambda(x-1) - \omega(z-b), \\ \dot{y} = -\delta(y-1), \\ \dot{z} = \omega(x-1) - \lambda(z-b), \end{array} \tag{1}
$$

где α, δ, ν, ω, λ и b – положительные параметры. Эти линейные системы (подсистемы) определены на следующем разбиении фазового пространства G_s, G_l, и G_r, соответственно:

$$
G_s: |x| < 1, y \in \mathbb{R}^1, z < b,
$$

$$
G_l: \begin{cases} x \leqslant -1 \quad \text{при} \quad z \leqslant b, \\ x \leqslant -1 \quad \text{при} \quad z > b, y \geqslant 0, \\ x < 1 \quad \text{при} \quad z > b, y < 0, \end{cases} \quad G_r: \begin{cases} x \geqslant 1 \quad \text{при} \quad z \leqslant b, \\ x \geqslant 1 \quad \text{при} \quad z > b, y < 0, \\ x > -1 \quad \text{при} \quad z > b, y \geqslant 0. \end{cases}
$$

Линейная подсистема A_s определяет динамику системы (1) в области G_s и имеет седло O_s в начале координат. Подсистемы $A_{r,l}$ определены в областях $G_{r,l}$ и имеют симметричные трёхмерные фокусы $e_{r,l} = \{\pm 1, \pm 1, b\}$, соответственно. Предполагается, что параметры удовлетворяют условиям

$$
\frac{1}{2} < \nu < 1.
$$

*Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (проект № 0729-2020-0036). Работа также поддержана РНФ (грант № 19-12-00367).

что означает, что седловая величина $\sigma = 1 - \nu > 0$ положительна. Введём новые параметры

$$\gamma = be^{-\frac{3\pi\lambda}{2\omega}}, \quad \gamma_{cr} = 2\sqrt{1+\lambda^2/\omega^2}e^{-\frac{\delta}{\omega}\arctan\frac{\lambda}{\omega}},$$
$$\mu = (\gamma - 1)\gamma^{\frac{1}{\nu-1}}, \quad \varepsilon = (\gamma - \gamma_{cr})\gamma^{\frac{1}{\nu-1}}.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *(неустойчивая гомоклиническая орбита порождает устойчивый цикл)*

1. *При* $\mu < \varepsilon \leqslant 0$ *система* (1) *имеет два устойчивых фокуса* e_l *и* e_r, *и седло* O_s.
2. *При* $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$ *в системе* (1) *образуется две симметричных неустойчивых гомоклинических орбиты седла* O_s *(гомоклиническая бабочка).*
3. *При* $\varepsilon > 0$ *увеличение* $\mu \in (\varepsilon, \varepsilon + \varepsilon^{1/\nu})$ *приводит к появлению в системе* (1) *устойчивого предельного цикла периода 2 и двух седловых предельных циклов, которые одновременно родились от гомоклинической бабочки.*

Доказательство теоремы рассматривается в докладе. Представленные результаты опубликованы в работах [2, 3].

Список литературы

1. *Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V.* A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results // Chaos. 2019. Vol. 29, no. 10. 103108.
2. *Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V.* Bifurcations of Chaotic Attractors in a Piecewise Smooth Lorenz-Type System // Automation and Remote Control. 2020. V. 81, no 8. P. 1385–1393.
3. *Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V.* Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs // Chaos. 2021. Vol. 31, no 4. 043117.