Неособые потоки с динамикой аттрактор-репеллер на n-многообразиях*

О. В. Починка, Д. Д. Шубин✉

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород
✉ dshubin@hse.ru

Результаты получены совместно с О. Починкой. Этот доклад посвящен так называемым *НМС-потокам* (неособым потокам Морса–Смейла), которые являются потоками Морса–Смейла без неподвижных точек. Такие потоки тесно связаны с топологией объемлющего многообразия. Получена и будет представлена исчерпывающая классификация этих систем ровно с двумя предельными циклами на замкнутых n-многообразиях.

Из общей теории (см., например, [1]) следует, что объемлющее многообразие M^n является объединением устойчивых многообразий и одновременно объединением неустойчивых многообразий. Таким образом, одна из этих траекторий притягивающая, а другая отталкивающая.

По теореме Пуанкаре–Хопфа эйлерова характеристика объемлющего многообразия равна 0. Из двумерных поверхностей получаем только тор и бутылку Клейна. Классификация таких потоков является частью задачи, решённой в [2–4]. Авторами установлено, что существует ровно два класса топологической эквивалентности таких потоков на торе и три на бутылке Клейна.

Для трехмерных многообразий тот факт, что эйлерова характеристика равна нулю, не сужает класс многообразий, поскольку все трехмерные многообразия имеют эйлерову характеристику, равную нулю. Необходимые и достаточные условия следуют из [5], где автор рассматривает более широкий класс динамических систем. Однако результаты не содержат реализации и невозможно судить о допустимости того или иного потока.

В случае двух нескрученных орбит топология объемлющего многообразия известна из [6]: это так называемые *линзовые пространства*, которые получаются путем склейкой двух полноторий вдоль их границы. Установлено, что любое линзовое пространство, кроме сферы и проективного пространства, допускает ровно два эквивалентных класса рассматри-

*Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

ваемых потоков. На сфере S^3 существует единственный класс благодаря [6]. Если орбиты скручены, то существует только одно объемлющее многообразие, допускающее такой поток, это $\mathbb{S}^2\widetilde{\times}\mathbb{S}^1$, и оно допускает два эквивалентных класса рассматриваемых потоков.

Для $n \geqslant 3$ объемлющее многообразие $M^n, n > 3$ представляет собой два обобщенных полнотория $\mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, склеенных по границам. Результаты [7] и [8] подразумевают, что только два многообразия, допускающие НМС-поток с двумя предельными циклами, это $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^{n-1}\widetilde{\times}\mathbb{S}^1$ и каждый из них допускает два эквивалентных класса рассматриваемых потоков.

Список литературы

1. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73. P. 747–817.
2. *Peixoto M. M.* On a classification of flows on 2-manifolds // Proc. Symp. Dyn. Syst. Salvador. 1973. P. 389–492.
3. *Oshemkov A. A., Sharko V. V.* Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds // Sb. Math. 1998. Vol. 189, no. 8. P. 1205–1250.
4. *Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O.* Topoligical classification of Ω-stable flows on surfaces by means of effectively distinguishable multigraphs // Discrete & Continuous Dynamical Systems – A. 2018. Vol. 38, no. 9. P. 4305–4327. doi: 10.3934/dcds.2018188
5. *Umanskii Ya. L.* Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional Morse–Smale dynamical systems with a finite number of singular trajectories // Math. USSR-Sb. 1991. Vol. 69, no. 1. P. 227–253.
6. *Bin Yu.* Behavior 0 nonsingular Morse Smale flows on S^3 // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2016. Vol. 36, no. 1. P. 509–540.
7. *Nelson Max L.* Homeomorphisms of $S^n \times S^1$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, no. 6. P. 939–942.
8. *Jahren B. and Kwasik S.* Free involutions on S1×Sn // Math. Ann. 2011. Vol. 351, no. 2. P. 281–303.