О классах устойчивой изотопической связности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей*

Е. В. Ноздринова✉, *О. В. Починка*

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород
✉ maati@mail.ru

Проблема существования дуги с не более, чем счетным (конечным) числом бифуркаций, соединяющей структурно устойчивые системы (системы Морса–Смейла) на многообразиях вошла в список пятидесяти проблем Палиса-Пью [6] под номером 33.

В 1976 году Ш. Ньюхаусом, Дж. Палисом, Ф. Такенсом [4] было введено понятие устойчивой дуги, соединяющей две структурно устойчивые системы на многообразии. Согласно [4], гладкая дуга φ_t называется *устойчивой*, если она является внутренней точкой класса эквивалентности относительно следующего отношения: дуги φ_t, φ'_t называются *сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы $h:[0,1]\to[0,1]$, $H_t: M\to M$ такие, что $H_t\varphi_t=\varphi'_{h(t)}H_t, t\in[0,1]$ и H_t непрерывно зависит от t.

В работе [3] также установлено, что все точки регулярной устойчивой дуги являются структурно устойчивыми диффеоморфизмами за исключением конечного числа бифуркационных диффеоморфизмов, которые не имеют циклов, гетероклинических касаний и имеют одну негиперболическую периодическую орбиту, которая является орбитой некритического седло-узла или флипа и бифурцирует на дуге общим образом.

В 1976 году Ш. Ньюхаус и М. Пейшото [5] доказали существование простой дуги между любыми двумя потоками Морса–Смейла. Простота означает, что вся дуга состоит из систем Морса–Смейла за исключением конечного множества точек, в которых векторное поле в определённом смысле наименьшим образом отклоняется от системы Морса–Смейла, а именно, либо содержит единственную негиперболическую точку типа седло-узел, либо единственную траекторию нетрансверсального пересечения инвариантных седловых многообразий (гетероклиническое касание).

Однако результаты Ш. Ньюхауса и М. Пейшото не могут быть напрямую использованы для построения устойчивых дуг между диффеомор-

*Работа поддержана Лабораторией динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931

физмами Морса–Смейла. Для этого есть несколько причин. Во-первых, типично диффеоморфизмы Морса–Смейла не включаются в потоки Морса-Смейла (см., например, обзор [1]). Во-вторых, дискретизация дуги с гетероклиническим касанием не является устойчивой дугой. Второй проблемы удается избежать в силу результата, полученного Ж. Флейтас [2], а именно она показала, что простую дугу, построенную Ньюхаусом и Пейшото всегда можно заменить на устойчивую. При этом дискретизация такой дуги является устойчивой дугой, соединяющей сдвиги на единицу времени исходных градиентно-подобных потоков.

Для диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на многообразиях любой размерности известны примеры систем, которые не могут быть соединены устойчивой дугой. В связи с этим естественно возникает вопрос о нахождении инварианта, однозначно определяющего класс эквивалентности диффеоморфизма Морса–Смейла относительно отношения связанности устойчивой дугой (*компоненту устойчивой изотопической связности*).

В докладе будет представлен критерий принадлежности одной компоненте устойчивой связности для сохраняющих ориентацию градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерной сфере S^2. Приведена полная классификация диффеоморфизмов Палиса, введенных им как класс поверхностных каскадов, включающихся в топологический поток. Техника построения дуг использует топологические методы исследования динамических систем, основанные на переходе к пространству блуждающих орбит.

Список литературы

1. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Починка О. В.* О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла в топологический поток // Современная математика. Фундаментальные направления. 2020. Vol. 66, № 2. P. 160–181.
2. *Fleitas G.* Replacing tangencies by saddle-nodes // Bol. Soc. Brasil. Mat. 1977. Vol. 8, no. 1. P. 47–51.
3. *Newhouse S., Palis J., Takens F.* Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publications mathematiques de l' I.H.E.S. 1983. Vol. 57. P. 5–71.
4. *Newhouse S., Palis J., Takens F.* Stable arcs of diffeomorphisms // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 82, no. 3. P. 499–502.
5. *Newhouse S., Peixoto M.* There is a simple arc joining any two Morse–Smale fows // Asterisque. 1976. Vol. 31. P. 15–41.
6. *Palis J., Pugh C.* Fifty problems in dynamical systems // Lecture Notes in Math. 1975. Vol. 468. P. 345–353.