## Нелинейные волны. Задачи для компьютерных исследований

**1.** ***Схема с разностями «против потоков».*** Напишите программу численного решения линейного уравнения переноса

$$u_t + c u_x = 0,$$

где $c = \mathrm{const}$, используя схему с разностями «против потоков»

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

где $u_i^n = u\left(x = i\Delta x, t = n\Delta t\right)$ — значения функции $u$ в узлах дискретной пространственно-временной сетки. Разлагая $u\left(x,t\right)$ в соседних узлах в ряды Тейлора

$$u_{i\pm1}^n = u_i^n \pm \Delta x u_x + \frac{\Delta x^2}{2}u_{xx} \pm \ldots,$$

и т.д. (все производные вычисляются в точке $x = i\Delta x$, $t = n\Delta t$), покажите, что эта схема имеет первый порядок точности по координате и времени, причем погрешность носит *диссипативный* характер. Конкретно, покажите, что

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = u_t + c u_x - \eta u_{xx} + O\left(\Delta x^2, \Delta t^2\right),$$

где $\eta = \dfrac{c\Delta x\left(1 - c\,\Delta t/\Delta x\right)}{2}$ — так называемый коэффициент искусственной («схемной») вязкости. Отсюда следует, что условие устойчивости имеет вид

$$0 < \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1.$$

С помощью созданной программы пронаблюдайте распространение импульса вида

$$u\left(x; t = 0\right) = a\sin^2\left(x/\Delta\right)$$

при различных параметрах $a$, $\Delta$. Как эти результаты зависят от отношения $\Delta t/\Delta x$? Убедитесь, что наибольшая точность достигается при $\Delta x/\Delta t \to c$. Убедитесь, что при $\Delta t/\Delta x > 1$ схема неустойчива.

**2.** Напишите аналогичную программу для уравнения простой волны, предварительно переписав его в *дивергентной* форме (т.е. в виде закона сохранения): $u_t + \left(u^2/2\right)_x = 0$. Конечно-разностная схема, таким образом, будет иметь вид

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\left(u_i^n\right)^2 - \left(u_{i-1}^n\right)^2}{2\Delta x} = 0.$$

Рассмотрите задачу о распространении гармонического сигнала, т.е. задачу со следующим граничным условием:

$$u(x=0;t)=1+a\sin(\omega t).$$

Найти аналитически условие устойчивости для нелинейного уравнения не удается, однако, по аналогии с предыдущей задачей, можно заключить, что оно будет приближенно иметь вид

$$\frac{u_{\max}\Delta t}{\Delta x}<1,$$

где $u_{\max}$ — максимальное значение переменной *u*, которое можно оценить как $u_{\max}\approx 1+a$. При этом следует выбирать шаг по времени максимально близким к $\Delta x/(1+a)$, чтобы минимизировать «схемную» вязкость.

Поскольку погрешность схемы с разностями «против потоков» носит диссипативный характер, при ее использовании фактически находится решение уравнения простой волны с разрывами. Пронаблюдайте процессы нелинейного укручения волны, образования разрывов и превращения синусоидальной волны в пилообразную.

**3.** Составьте программы численного решения уравнения Бюргерса

$$u_t+\left(u^2/2\right)_x=\nu u_{xx}$$

при помощи следующих конечно-разностных схем:

- $$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\frac{\left(u_i^n\right)^2-\left(u_{i-1}^n\right)^2}{\Delta x}=\nu\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2};$$
- $$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\frac{\left(u_{i+1}^n\right)^2-\left(u_{i-1}^n\right)^2}{2\Delta x}=\nu\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Методы имеют погрешность аппроксимации $O(\Delta t,\Delta x)$ и $O(\Delta t,\Delta x^2)$ соответственно. Оценки условия устойчивости имеют вид

$$\Delta t<\frac{\Delta x}{u_{\max}}\left(1+\frac{2\nu}{u_{\max}\Delta x}\right)$$

для первого метода и

$$\Delta t<\frac{2\nu}{u_{\max}^2}$$

— для второго.

Для обеих разностных схем решите задачу об эволюции начального профиля в виде ступеньки

$$u(x;t=0)=\begin{cases} u_1 & \text{при } x>x_0,\\ u_2>u_1 & \text{при } x<x_0.\end{cases}$$

Пронаблюдайте его превращение в ударную волну. Сравните результаты в пределе малых $\nu$ с аналогичными решениями для уравнения простой волны (задача 2).

**4.** ***Проблема Ферми–Пасты–Улама.*** Повторите численный эксперимент Ферми–Пасты–Улама (E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, 1955). Создайте программу численного моделирования колебаний нелинейной цепочки с квадратичной нелинейностью, которая описывается уравнениями

$$\ddot{u}_n = \gamma\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) + \alpha\left[\left(u_{n+1} - u_n\right)^2 - \left(u_n - u_{n-1}\right)^2\right],\ n = 0,1,\ldots,N.$$

Для решения этих уравнений используйте метод Рунге–Кутты 4-го порядка. Рассмотрите цепочку из $N$=64 элементов с периодическими граничными условиями

$$u_0 = u_N.$$

Начальное условие выберите в виде колебаний на основной собственной моде

$$u_n\left(t = 0\right) = U_0 \cos\omega t \sin\left(2\pi n/N\right),$$

где $\omega = 2\sqrt{\gamma}\sin\left(\pi/N\right)$. Пронаблюдайте возвращаемость ФПУ. Повторите эксперименты при различных значениях начальной амплитуды $U_0$.

**5.** Повторите численный эксперимент Забуски и Крускала (N. Zabuski, M. Kruskal, 1965). Создайте программу численного решения уравнения КдВ

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$$

при $\beta = 0.022$ с периодическими граничными условиями $u\left(0\right) = u\left(2\pi\right)$. Начальное условие задайте в виде $u\left(x; t = 0\right) = \cos x$. Используйте разностную схему, предложенную Забуски и Крускалом

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{1}{3\Delta x}\left(u_{i+1}^n + u_i^n + u_{i-1}^n\right)\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) - \frac{\beta}{\Delta x^3}\left(u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\right).$$

Условие устойчивости данной разностной схемы имеет вид

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^3} \le \beta\left(4 + \Delta x^2 u_{\max}\right)^{-1}.$$

Пронаблюдайте распад начального профиля на солитоны и возвращаемость ФПУ. Как зависят результаты от амплитуды начального возмущения?

**6.** Составьте программу численного моделирования дискретного уравнения Гинзбурга–Ландау

$$\frac{dA_n}{dt} = A_n + \left(1 + ib\right)\cdot\left(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}\right) - \left(1 - ic\right)\left|A_n\right|^2 A_n,\ n = 0,1,\ldots,N$$

с периодическими граничными условиями $A_0 = A_N$. Здесь $A_n$ — комплексные амплитуды колебаний, $b$ и $c$ — вещественные параметры. Пронаблюдайте возникновение модуляционной неустойчивости при $bc > 1$, а также режимы амплитудной и фазовой турбулентности.

**7.** Составьте программу численного моделирования дискретного уравнения Гинзбурга–Ландау

$$\frac{dA_n}{dt} = A_n - V\left(A_n - A_{n-1}\right) + \left(1 + ib\right) \cdot \left(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}\right) - \left(1 - ic\right)\left|A_n\right|^2 A_n,$$

где $n = 0,1,\ldots,N$, с нулевым граничным условием на левой границе $A_0 = 0$. На правой границе поставьте свободное граничное условие $A_N = A_{N-1}$. Проведите серию расчетов, постепенно уменьшая скорость потока $V$. Пронаблюдайте переход от конвективной неустойчивости к абсолютной, а также возникновение хаотической динамики.

**8.** Составьте программу численного моделирования системы брюсселятор с диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a - \left(b+1\right)u + u^2 v + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = bu - u^2 v + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

с периодическими граничными условиями $u\left(x=0\right) = u\left(x=L\right)$, $v\left(x=0\right) = v\left(x=L\right)$, $L$ — длина системы. Начальные условия задайте в виде малых периодических возмущений равновесного состояния

$$u\left(x, t=0\right) = a + u_m \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right),\ v = \frac{b}{a} - v_m \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right),$$

где $u_m$, $v_m$ — малые по сравнению с равновесными значениями величины. Выбрав параметры так, чтобы выполнялось неравенство

$$a\left(1 - \frac{D_u}{D_v}\right) > 2\sqrt{\frac{D_u}{D_v}}, \qquad (1)$$

пронаблюдайте возникновение диссипативных структур при неустойчивости Тьюринга, когда $b > b_T \equiv \left(1 + a\sqrt{D_u/D_v}\right)^2$. Зависят ли результаты от *n*?

Выберите параметры, при которых неравенство (1) не выполняется, и пронаблюдайте неустойчивость Хопфа при $b > b_H = 1 + a^2$.

**9.** Составьте программу численного моделирования системы брюсселятор с потоком (С.П. Кузнецов, 1999)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = a - \left(b+1\right)u + u^2 v + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = bu - u^2 v + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Считайте, что на левой границе переменные принимают равновесные значения, $u\left(x=0\right) = a$, $v\left(x=0\right) = b/a$, а на правой задайте свободные граничные условия, $u_x(L,t) = v_x(L,t) = 0$. Выберите параметры таким образом, чтобы выполнялось условие (1), и, последовательно уменьшая скорость потока $c$, пронаблюдайте переход от конвективной неустойчивости Тьюринга к абсолютной. Проделайте то же самое для неустойчивости Хопфа, когда условие (1) не выполняется.