Задачи по курсу «Математические методы нелинейной физики»

1. ***Законы сохранения.*** Преобразование

$$u = w + i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2, \tag{1}$$

где ε — произвольный параметр, переводит решение уравнения Гарднера $w_t + 6\left(w + \varepsilon^2 w^2\right) w_x + w_{xxx} = 0$ в решение уравнения КдВ $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$. Покажите, что из закона сохранения для уравнения Гарднера

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} w dx = 0$$

следует наличие бесконечного числа законов сохранения для уравнения КдВ. Для этого выразите решение уравнения (1) $w(u)$ в виде ряда по степеням ε

$$w = w_0(u) + \varepsilon w_1(u) + \varepsilon^2 w_2(u) + \ldots.$$

Подставляя это выражение в (1) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, последовательно вычислите w_n до $n = 6$. Интегралы движения имеют вид

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} w_n(u) dx.$$

Покажите, что все нечетные интегралы тождественно равны нулю. Найдите нетривиальные I_n для $n = 0$, 2, 4, 6.

2. ***Метод Хироты.*** Заменой переменных $u = g/f$ приведите модифицированное уравнение КдВ

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

к системе двух билинейных уравнений относительно функций g и f

$$g^2 = ff_{xx} - f_x^2,$$
$$g_t f - gf_t + fg_{xxx} - 3f_x g_{xx} + 3f_{xx} g_x - gf_{xxx} = 0.$$

Отыскивая решения этой системы в виде рядов

$$g = \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \ldots,$$
$$f = 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4 + \ldots,$$

получите односолитнное решение уравнения мКдВ. При этом следует выбрать $g_1 = 2k \exp\theta$, где $\theta = kx - k^3 t$, k — вещественный параметр, найти решение для f_2 и показать, что ряды на этом обрываются, т.е. все члены более высокого порядка равны нулю.

3. Выбирая в предыдущей задаче решение в первом порядке в виде суммы двух экспонент $g_1 = 2k_1 \exp\theta_1 + 2k_2 \exp\theta_2$, где $\theta_{1,2} = k_{1,2}x - k_{1,2}^3 t$, получите решение, описывающее взаимодействие двух солитонов.

Последовательно найдите решения для f_2, g_3, f_4 и убедитесь, что члены более высоких порядков обращаются в нуль.

4. Полагая, что в формуле для двухсолитонного решения, полученной в предыдущей задаче, параметры $k_{1,2}$ являются комплексно сопряженными, $k_{1,2} = k_r \pm ik_i$, найдите бризерное решение уравнения мКдВ. Постройте на компьютере зависимости $u(x)$ в различные моменты времени, иллюстрирующие динамику бризера при различных значениях $k_{r,i}$.

5. Покажите, что уравнение Буссинеска

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxxx} = 0$$

заменой $u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln f(x,t)$ приводится к билинейной форме. Найдите решение полученного уравнения в виде

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + Ae^{\theta_1+\theta_2},$$

описывающее взаимодействие двух солитонов. Здесь $\theta_i = \omega_i t + k_i x$, $\omega_i = -k_i^3$. Покажите, что константа A, определяющая сдвиг солитонов при взаимодействии, равна

$$A = \frac{3(k_1 - k_2)^2 + \left(\sqrt{1+k_1^2} \mp \sqrt{1+k_2^2}\right)^2}{3(k_1 + k_2)^2 + \left(\sqrt{1+k_1^2} \mp \sqrt{1+k_2^2}\right)^2}.$$

В этой формуле верхний знак соответствует попутному столкновению солитонов, нижний — встречному.

6. Заменой переменных $u = g/f$ приведите нелинейное уравнение Шрёдингера

$$iu_t + u_{xx} + \beta|u|^2 u = 0$$

к билинейной форме

$$gg^* = \frac{2}{\beta}\left(ff_{xx} - f_x^2\right),$$

$$i(g_t f - gf_t) + fg_{xx} - 2f_x g_x + gf_{xx} = 0,$$

и, действуя аналогично задачам 2,3, найдите одно- и двухсолитонные решения.

7. Покажите, что уравнение Sin-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$$

заменой переменных $\xi = (x-t)/2$, $\tau = (x+t)/2$, которая фактически означает переход к интегрированию вдоль характеристик, приводится к виду

$$u_{\xi\tau} = \sin u. \qquad (2)$$

Положите $u_\xi^2 = 2g/f$, и потребуйте, чтобы

$$g^2 = ff_{\xi\xi} - f_\xi^2 . \tag{3}$$

(ср. задачи 2, 6), так, чтобы

$$u_\xi^2 = 4\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \xi^2} . \tag{4}$$

Умножьте (2) на u_ξ, подставьте туда это выражение и проинтегрируйте с учетом граничных условий $u \to 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ при $\xi \to \infty$. Убедитесь, что при этом

$$\cos u = 1 - 2\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \xi \partial \tau} . \tag{5}$$

Далее, с учетом (4), (5) получите из (2) второе билинейное уравнение

$$g_\tau^2 = f_\tau f_{\xi\xi\tau} - f_{\xi\tau}^2 + ff_{\xi\tau} - f_\xi f_\tau . \tag{6}$$

Отыскивая решения системы уравнений (3), (6) в виде рядов

$$g = \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \ldots,$$

$$f = 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4 + \ldots,$$

аналогично задачам 40, 41, 44, найдите одно- и двухсолитонные решения уравнения Sin-Гордона.

8. Альтернативная форма метода Хироты для уравнения Sin-Гордона (R. Hirota, 1972) основана на замене переменных $u = 4\,\mathrm{arctg}\left(g/f\right)$. Покажите, что при этом из (2) можно получить следующую систему уравнений:

$$fg_{\xi\tau} - g_\xi f_\tau - g_\tau f_\xi + gf_{\xi\tau} = fg,$$

$$gg_{\xi\tau} - g_\xi g_\tau = ff_{\xi\tau} - f_\xi f_\tau .$$

Отыскивая решения этой системы аналогично предыдущей задаче, покажите, что выбор $g_1 = \exp(\theta)$, где $\theta = k\xi + \tau/k$, приводит к $f_{2,4,\ldots} = 0$, $g_{3,5,\ldots} = 0$, в результате чего получаем односолитонное решение $u = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp(\theta)\right]$. Выбирая g_1 в виде суммы двух экспонент

$$g_1 = \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2),$$

где $\theta_{1,2} = k_{1,2}\xi + \tau/k_{1,2}$, найдите двухсолитонное решение

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}\frac{\mathrm{sh}\left[(\theta_1 - \theta_2)/2\right]}{\mathrm{ch}\left[(\theta_1 + \theta_2)/2\right]}\right).$$

9. Полагая, что в выражении для двухсолитонного решения, полученного в предыдущей задаче, параметры $k_{1,2}$ являются комплексно сопряженными, $k_{1,2} = k_r \pm ik_i$, найдите решение уравнения Sin-Гордона в виде бризера. Постройте на компьютере зависимости $u(x)$ в различные моменты времени, иллюстрирующие динамику бризера при различных значениях $k_{r,i}$.

10. Пример интегрируемой дискретной динамической системы представляет цепочка Тоды (M. Toda, 1970): цепочка связанных частиц, потенциал взаимодействия между которыми экспоненциально зависит от расстояния. Уравнения движения элементов цепочки имеют вид

$$\ddot{u}_n = \exp(u_{n-1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n+1}).$$

Введите новую переменную v_n, такую, что $u_n = v_{n-1} - v_n$, причем v_n и все ее производные стремятся к нулю при $n \to \pm\infty$, и покажите, что

$$1 + \ddot{v}_n = \exp(v_{n+1} - 2u_n + v_{n-1}).$$

Найдите замену переменных $v_n = F(f_n)$, приводящую это уравнение к билинейной форме

$$f_n \ddot{f}_n - \dot{f}_n^2 = f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2.$$

Отыскивая решения в виде $f_n = 1 + \varepsilon f_n^{(1)} + \varepsilon^2 f_n^{(2)} + \ldots$, получите выражения для односолитонных и двухсолитонных решений.

11. ***Гамильтонов формализм.*** Покажите, что уравнение Sin-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$$

можно представить в форме канонических уравнений Гамильтона

$$u_t = \frac{\delta H}{\delta p}, \quad p_t = -\frac{\delta H}{\delta u}, \tag{7}$$

где гамильтонианом является функционал $H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(u, u_x, u_t)\, dx$,

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u.$$

— плотность гамильтониана. В (7) введено обозначение

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)$$

— вариационная производная функционала $F = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, u, u_x)\, dx$.

Подсчитайте полную энергию для следующих решений:

- кинка;
- двух взаимодействующих кинков;
- взаимодействующих кинка и антикинка;
- бризера.

12. Представьте уравнение Буссинеска

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \left(u u_x\right)_x - \beta u_{xxxx} = 0$$

в гамильтоновой форме

$$u_t = \frac{\delta H}{\delta p}, \;\; p_t = -\frac{\delta H}{\delta u}.$$

13. Представьте нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i u_t + u_{xx} + \beta \left|u\right|^2 u = 0$$

в гамильтоновой форме

$$u_t = \frac{\delta H}{\delta u^*}, \; u_t^* = -\frac{\delta H}{\delta u}.$$

14. ***Преобразования Бэклунда.*** Решения u_1 и u_2 уравнения Sin-Гордона $u_{\xi\tau} = \sin u$ связаны преобразованиями Бэклунда

$$\frac{\left(u_1 + u_2\right)_\xi}{2} = k \sin\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right),$$

$$\frac{\left(u_1 - u_2\right)_\xi}{2} = \frac{1}{k} \sin\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right),$$

где k — параметр. Покажите, что, если выбрать в качестве u_2 тривиальное нулевое решение, для u_1 получим решение в виде солитона (кинка) $u_1 = 4\,\mathrm{arctg}\left(\exp\theta\right)$, где $\theta = k\xi + \tau/k$.

Воспользовавшись свойством коммутативности преобразований Бэклунда, которое иллюстрирует приведенный ниже рисунок, выберите в качестве u_0 нулевое решение, в качестве $u_{1,2}$ — односолитонные решения, и получите для u_3 решение, описывающее взаимодействие двух солитонов.

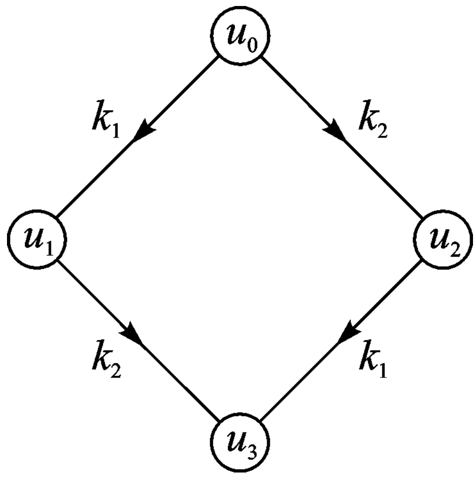

Рис. 1. Схема, поясняющая коммутативность преобразований Бэклунда

15. Как выглядит диаграмма, аналогичная рис. 1, для трехсолитонного решения?

16. Уравнение КдВ $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ заменой переменных $u = 2w_x$ может быть приведено к виду $w_t + 6\left(w_x\right)^2 + w_{xxx} = 0$. Два независимых решения этого уравнения w и W связаны преобразованиями Бэклунда (H. Wahlquist, F. Estabrook, 1973)

$$\left(w+W\right)_x = k^2 - \left(w-W\right)^2,$$

$$\left(w-W\right)_t = 6\left(w-W\right)^2\left(w-W\right)_x - k^2\left(w-W\right)_x - \left(w-W\right)_{xxx}.$$

Действуя по схеме, описанной в предыдущей задаче, найдите односолитонное и двухсолитонное решения уравнения КдВ.

17. ***Автомодельные решения.*** Покажите, что уравнение КдВ $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ имеет автомодельное решение вида $u\left(x,t\right) = \left(3t\right)^{-2/3} f\left(z\right)$, где $z = x/\left(3t\right)^{1/3}$, а $f\left(z\right)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f''' + 6ff' - zf' - 2f = 0. \tag{8}$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование по z.

18. Покажите, что модифицированное уравнение КдВ $u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$ имеет автомодельное решение вида $u\left(x,t\right) = \left(3t\right)^{-1/3}\psi\left(z\right)$, где $z = x/\left(3t\right)^{1/3}$, а $\psi\left(z\right)$ удовлетворяет уравнению (уравнение Пенлеве II типа)

$$\psi'' + 2\psi^3 - z\psi + C = 0, \tag{9}$$

где C — произвольная постоянная.

19. Покажите, что замена переменных $f = \psi^2 - \psi'$ приводит уравнение (8) к виду

$$f''' + 6ff' - zf' - 2f = \left(\frac{d^2}{dz^2} - 2\psi\frac{d}{dz}\right)\left(\psi'' + 2\psi^3 - z\psi\right).$$

Таким образом, если $\psi\left(z\right)$ удовлетворяет уравнению (9), то $f\left(z\right)$ удовлетворяет (8).

20. Покажите, что уравнение КдВ имеет автомодельное решение вида $u\left(x,t\right) = t + f\left(z\right)$, где $z = x - 3t^2$, а $f\left(z\right)$ удовлетворяет уравнению (уравнение Пенлеве I типа)

$$f'' + 3f^2 + z + C = 0,$$

где C — произвольная постоянная.

21. Покажите, что уравнение Sin-Гордона $u_{\xi\tau} = \sin u$ имеет автомодельное решение $u = u\left(z\right)$, где $z = \xi\tau$, а $u\left(z\right)$ удовлетворяет уравнению

$$zu'' + u' = \sin u. \tag{10}$$

Постройте на компьютере решения этого уравнения. Чтобы избежать сингулярности в точке $z=0$, граничное условие выберите в виде $u'(0)=\sin u(0)$.

22. Найдите замену переменных $w=w(u)$, с помощью которой уравнение (10) приводится к виду (частный случай уравнения Пенлеве III типа)

$$w_{zz}=\frac{w_z^2}{w}-\frac{w_z}{z}+\frac{w^2-1}{2z}.$$