УДК 517.52

Об упорядочивании и вариации функций на нульмерных компактных группах[1]

В. И. Щербаков, (гор. Жуковский Московской области, Россия)

kafmathan@mail.ru (для В.И.Щербакова)

Показано, что вариация функции (согласно её "классическому" определению) на нульмерной компактной абелевой группе зависит от отображения этой группы на отрезок $[0, 1]$, то есть от выбора базисных элементов. Существуют функции, которые являются функциями ограниченной вариации (и даже монотонными функциями) при одном выборе базисных элементов (и связанным с этими базисными элементами понятием упорядочивания) и не будут иметь ограниченной вариации относительно другого набора базисных элементов.

Ключевые слова: нульмерная компактная абелева группа, функции ограниченной вариации.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-01404).

About ordering and variattion of the function on zero-dimensional compact groups[1]

V. I. Shcherbakov (Zhukovsky of Moscow district, Russia)

kafmathan@mail.ru (for V.I.Shcherbakov)

It is shown that the variation of a function (according to its "classical" definition) on a zero-dimensional compact Abelian group depends on the mapping of this group to the segment $[0, 1]$, that is, on the choice of basic elements. There are functions which are functions of the bounded variation (and even monotonic functions) for one choice of basic elements (and the ordering associated with this elements) and will not have bounded variation with respect to
to another set of basic elements.

Keywords: zero-demensional compact Abelian group; functions of bounded variation.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 17-01-01404).

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность, состоящая из простых чисел; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k \, (n = 0, 1, 2, \dots)$ и G — нульмерная компактная абелева группа (группа Виленкина [1]) с операцией $\oplus$, обратной операцией $\ominus$, нулевым элементом 0_G, системой вложенных подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots \text{ таких, что } \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0_G\} \qquad (1)$$

и фактор-группа $G_{n-1} \setminus G_n$ имеет порядок $p_n \, (n = 1, 2, \dots)$.

Заданные в (1) подгруппы G_n являются системой окрестностей нуля в группе G. Таким образом в G определенна топология, относительно которой вводятся понятия сходимости и непрерывности функции. Относительно этой топологии группа G является компактом.

В каждом из множеств $G_{n-1} \setminus G_n$ зафиксируем элемент $e_n\,(n = 1, 2, \ldots)$, который назовем базисным. Всякий элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = x_1 \cdot e_1 \oplus x_2 \cdot e_2 \oplus \ldots \oplus x_n \cdot e_n \oplus \ldots, \text{ где } x_k \text{ — целые с } 0 \le x_k \le p_k - 1. \quad (2)$$

Тогда элемент $x \in G$ отображается на отрезок $[0, 1]$

$$x \mapsto x_E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}\ , \text{ где } x_k \text{ определены в (2)}\ , \quad (3)$$

а $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ранее заданная система базисных элементов. Умножение элемента g группы G на целое неотрицательное число n определяется следующим образом:

$$0 \cdot g = 0_G;\ 1 \cdot g = g \text{ и } n \cdot g = \underbrace{g \oplus g \oplus g \ldots \oplus g}_{n \text{ раз}}$$

Отображение группы G на отрезок $[0, 1]$, заданное по формуле (3), иногда называют *отображением Монна* [2] (см,. например, [3]), хотя отображения группы G на отрезок $[0, 1]$ были известны ещё и Н. Я. Виленкину [1].

Взаимнооднозначность при отображении (3) нарушается лишь в точках вида

$$r+ =< \frac{l}{m_n} >= x_1 \cdot e_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} \cdot e_{n-1} \oplus x_n \cdot e_n \text{ и} \quad (4)$$

$$r- =< \frac{l}{m_n} > - = x_1 \cdot e_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} \cdot e_{n-1} \oplus (x_n - 1) \cdot e_n \oplus \ldots \oplus (p_{n+1} - 1) \cdot e_{n+1} \oplus$$
$$\oplus \ldots \oplus (p_{n+k} - 1) \cdot e_{n+k} \oplus \ldots, \quad (5)$$

которые при отображении (3) переходят в одно и то же число $r = \frac{l}{m_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{m_k}$.

На группе G вводится понятие упорядочивания точек следующим образом: $x < y$, если $x_E < y_E$, где x_E и y_E образы точек $x \in G$ и, соответственно, $y \in G$ при заданного формулой (3) отображении Монна, а также $r- < r+$, где $r-$ определена формулой (5), а $r+$ — равенством (4).

Упорядочивание можно определить и эквивалентным образом:

$$x = x_1\cdot e_1 \oplus \ldots \oplus x_n\cdot e_n \oplus \ldots < y = y_1\cdot e_1 \oplus \ldots \oplus y_n\cdot e_n \oplus \ldots,$$

если $x_k < y_k$, где $k = \min\{n \in \mathbb{N} | x_n \neq y_n\}$.

Вариацию от функции (под функцией будем понимать отображение группы G во множество действительных чисел $\mathbb{R}$; могут рассматриваться также и монотонные функции) определяем “классическим” образом (см., например [4]): пусть

$$T = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n | 0_G = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1_{GE}\} \qquad (6)$$

– некоторое разбиение группы G, где $1_{GE} = (p_1-1)\cdot e_1 \oplus (p_2-1)\cdot e_2 \oplus \ldots \oplus (p_n-1)\cdot e_n \oplus \ldots$ — точка группы G, образом которой при отображении Монна (3) является единица (1_{GE}, вообще говоря, зависит от выбора базисных элементов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Тогда *вариация* от функции $f(t)$ на группе G : $V(G) = \sup\limits_{T}(\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|)$, где верхняя грань по всем разбиениям T (6) группы G. При этом если эта верхняя грань конечна, то функция $f(t)$ называется функцией *ограниченной вариации,* иначе — функцией *неограниченной вариации.*

Эта вариация зависит от базиса $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, что отмечал ещё Н. Я. Виленкин [1]. Более того, даже сам класс функций ограниченной вариации на группе G зависит от базисных элементов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Справедлива следующая

Теорема. *Для всякого базиса* $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *найдётся функция ограниченной вариации (и даже монотонная) относительно этого базиса* $f(x)$, *и другие базисные элементы* $\tilde{E} = \{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$, *относительно которых та же функция* $f(x)$ *уже не имеет ограниченной вариации на* G.

Для $\sup\limits_{n} p_n = \infty$ предыдущая теорема была анонсирована в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН. СССР. сер. матем. 1947. Т. 11, № 4. С. 363–400.

[2] *Monna F.* Analysis Non-Archimedience. Berlin — Heildelberg — New-York — Springer — Veilag, 1970. 314 с.

[3] *Хренников А. Ю., Шелкович В. М.* Современный p-адический анализ и матаматическая физика: теория и приложения. М : Физматгиз, 2012. 452 с.

[4] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М : Физматгиз, 1961. 936 с.

[5] *Щербаков В. И.* О вариации функции на нульмерной компактной абелевой группе // XXVII Международная конференция. Математика. Экономика. Образование, XI Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения. Ростов-на-Дону. 2021. С. 23–24.