УДК 517.51

Об одной задаче Хедберга для емкости кольцевой области относительно заданного компакта[1]

В. А. Шлык (Владивосток, Россия)

shlykva@yandex.ru

Пусть $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1 \le q < \infty$, G — кольцевая область в евклидовом пространстве R^n, $n \ge 2$; E — компактное множество в R^n. В статье рассматривается решение задачи Хедберга о представлении q-емкости кольца G относительно E через p-модуль семейства поверхностей в $G \setminus E$, разделяющих граничные компоненты кольца G, когда $q=1$, $p=\infty$.

Ключевые слова: емкость конденсатора, модуль семейства поверхностей.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение № 075-02-2021-1395, и при поддержке Владивостокского филиала Российской таможенной академии.

On the problem of Hedberg for the ring domain capacity with respect to a given compact[1]

V. A. Shlyk (Vladivostok, Russia)

shlykva@yandex.ru

Let $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1 \le q < \infty$, G be a ring domain in Euclidean space R^n, $n \ge 2$; E be the compact set in R^n. In the paper we consider the solution of the Hedberg problem of representating the q-capacity of the ring G with respect to E by the p-module of a family of surfaces in $G \setminus E$ separating the boundary components of the ring G when $q=1$, $p=\infty$.

Keywords: condenser capacity, modulus of surface family.

Acknowledgements: the research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2021-1395, and by Vladivostok Branch of Russian Custom Academy.

Введение

Отметим, что решение сформулированной выше задачи Хедберга (см. [1], стр. 193) в случае $1 < q < \infty$ было дано в [2] и использует существенно равномерную выпуклость пространств $L_p(G \setminus E)$, $L_q(G \setminus E)$.

Здесь для $n \ge 2$ обозначим через $\overline{R^n} = R^n \cup \{\infty\}$ одноточечную компактификацию пространства R^n. Все топологические рассмотрения проводятся в метрическом пространстве $(\overline{R^n}, h)$, где h — хордальная метрика, порожденная стереографической проекцией (см. [3]). Через H^{n-1}

обозначим обычную $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа, и пусть m_n — мера Лебега в R^n. Под кольцом $G \subset R^n$ понимаем область, для которой $\overline{R^n} \setminus G$ состоит из двух непустых связных компонент F_0 и F_1, где $\infty \in F_0$.

Пусть E будет замкнутым множеством в $\overline{R^n}$. Будем говорить, что компакт $\sigma \subset G \setminus E$ разделяет F_0 и F_1 в $G \setminus E$, если существуют непересекающиеся открытые множества $A, B \subset \overline{R^n}$ такие, что $\overline{R^n} \setminus \sigma = A \cup B$ и $F_0 \subset A$, $F_1 \subset B$. Такой компакт σ будем называть поверхностью, разделяющей F_0 и F_1 в $G \setminus E$. Пусть $\Sigma = \Sigma(F_0, F_1, G \setminus E)$ обозначает семейство всех поверхностей, которые разделяют F_0 и F_1 в $G \setminus E$.

Для борелевской функции $\rho : G \setminus E \to [0, +\infty]$ положим $\|\rho\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{G \setminus E} \rho$ по m_n-мере.

Определим ∞-модуль семейства $\Sigma_1 \subset \Sigma$ как величину $M_\infty(\Sigma_1) = \inf \|\rho\|_\infty$, где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : G \setminus E \to [0, +\infty]$ таким, что $\int\limits_\sigma \rho dH^{n-1} \geq 1$ для всех $\sigma \in \Sigma_1$. В случае $\Sigma_1 = \Sigma$ положим $M_\infty(\Sigma) = M_\infty(G \setminus E)$. Функции ρ в определении $M_\infty(\Sigma_1)$ будем называть допустимыми метриками для Σ_1. Емкость $C_1(G/E)$ определим так же, как и в [1].

Нетрудно заметить, что если одна из компонент связности множества E соединяет F_0 и F_1, то $\Sigma = \emptyset$. В этом случае положим по определению $M_\infty(G \setminus E) = 0$, $C_1(G/E) = \infty$, что влечет равенство $M_\infty(G \setminus E) = \frac{1}{C_1(G/E)}$. Ниже считаем, что ни одна из компонент связности множества E не соединяет F_0 и F_1.

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $\Sigma_1 = \{\sigma \in \Sigma : H^{n-1}(\sigma) = \infty\}$. *Тогда* $M_\infty(\Sigma_1) = 0$.

Теорема 2. $C_1(G/E) < \infty$.

Теорема 3. *Если* $M_\infty(\Sigma) = \infty$, *то* $C_1(G/E) = 0$. *Справедливо обратное: если* $C_1(G/E) = 0$, *то* $M_\infty(\Sigma) = \infty$.

Теорема 4. *Если* $C_1(G/E) > 0$, *то* $\rho = \frac{1}{C_1(G/E)}$ *— допустимая метрика для* Σ.

Теорема 5. $C_1(G/E) = \frac{1}{M_\infty(G \setminus E)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hedberg L. I.* Removable singularities and condenser capacities // Arkiv. matem., 1974. Vol. 12, № 2. P. 181–201.

[2] *Шлык В. А.* Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей // Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1990. Том. 185, С. 165–182.

[3] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. New York : Springer, 2009. 367 p.