УДК 501.1

Двоичные базисные сплайны[1]

С. А. Чумаченко (Саратов, Россия)
email@mail.ru

Рассматривается новый класс базисных сплайнов, которые получаются многократным интегрированием функции Уолша. Установлено, что система сжатия и сдвигов, порожденная двоичным базисным сплайном, является базисом в пространстве непрерывных функций. Доказано, что двоичный базисный сплайн удовлетворяет масштабирующему уравнению и построен кратномасштабный анализ общего вида, который не является ортогональным. Проведена оценка приближения для функций из пространства Соболева.

Ключевые слова: системы сжатия и сдвигов, кратномасштабный анализ, масштабирующее уравнение.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

Binary basic splines[1]

S. A. Chumachenko (Saratov, Russia)
chumachenkosergei@gmail.com

We are exploring a new class of basic splines, which are obtained by multiple integration of the Walsh function. We found that the scales and shifts system was generated by a binary basic spline is a basis in the space of continuous functions. It is proved that the binary basis spline satisfies the scaling equation, and a general multi-resolution analysis is constructed but is not orthogonal. The approximation is estimated for functions from the Sobolev space.

Keywords: scales and shifts, multi-resolution analysis, scaling equation.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

Введение

Пусть $If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ $(x \in [0,1])$ – оператор интегрирования,

$W_{2^n-1}(x) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ – функции Уолша, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Определение 1. *Функцию*

$$\psi_{n,N}(x) = \begin{cases} Qn, NI^N W_{2^n-1}(x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

будем называть двоичным базисным сплайном n-й степени N-го порядка гладкости($N \leq n, N \in \mathbb{N}$), где $Q_{n,N}$ - нормирующий коэффициент

[1]Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

[1]This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

в $C[0,1]$

Будем рассматривать систему сжатий и сдвигов $\varphi_n^{m,j}(x) = \varphi_n(2^m x - j)$

Теорема 1. *Система* $\varphi_n^{m,j}(x)$ *является базисом в пространстве* $C_0[0,1]$ *и справедливо неравенство*

$$|f(x) - S_{2^m+j}(x)| \leq \omega_f(\frac{1}{2^{m+2}}) + \omega_f^2(\frac{1}{2^{m+2}}).$$

[1]

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\psi_{n,n}\left(x\right) = \frac{1}{2^n}\psi_{n,n}\left(2x-0\right) + \sum_{t=1}^{2^n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\psi_{n,n}\left(2x - \frac{t}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}\psi_{n,n}\left(2x-1\right).$$

Лемма 1. *Пусть* $F(x) = \psi\left(\frac{x}{2^n}\right)$. *Определим преобразование Фурье равенством*

$$\hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-2\pi i\omega x}dx.$$

Тогда

$$\hat{F}\left(\omega\right) = \frac{Q_{n,n}}{2}\left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - e^{-2^k\pi i\omega}\right)$$

При $m \in \mathbb{Z}$ образуем подпространства $V_m = \overline{(2^{\frac{m}{2}}F(2^n x + k)_{k\in Z})}$

Определение 2. *Если выполнены условия (аксиомы)*
A1) $V_m \in V_{m+1}$,
A2) $\bigcup_{m\in Z} V_m = L_2(\mathbb{R})$,
A3) $\bigcap_{m\in Z} V_m = 0$,
то совокупность $(V_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *называют обобщенным кратномасштабным анализом. Говорят также, что функция* φ *порождает обобщенный КМА.*

Теорема 3. *Совокупность* $(V_n)_{n\in Z}$ *образует обобщенный КМА.*

Замечание 1. Из леммы 1 видно, что КМА не является риссовским, так как не существует положительной константы, ограничивающей $\hat{F}$ снизу.

Определение 3. *Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Выражение*

$$[f,g](\omega) \overset{df}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\omega+k)\overline{g(\omega+k)}$$

называют скобочным произведением.

Определение 4. *Пусть $s > 0$. Множество*

$$W_2^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : ||f||_{W_2^s(\mathbb{R})} = ||\,(1+|\cdot|)^s \hat{f}||_{L_2(\mathbb{R})} < +\infty \right\}$$

называют пространством Соболева.

Определение 5. *Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R}), \varphi_{m,k}(x) = 2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^n x + k)$. Оператор*

$$\beta_m : f \to \sum_{k\in Z} (f, \varphi_{n,k})\, \varphi_{n,k}$$

называют квазиинтерполяционным оператором.

Определение 6. *Оператор β_m доставляет аппроксимацию порядка $t \in \mathbb{R}_+$, если для всех $f \in W_2^t(\mathbb{R})$ $||f - \beta_m f||_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-mt})$.*

Теорема 4. *Оператор β_m, построенный по функции $\varphi(x) = C_n F(x)$, где $C_n = \dfrac{2^{\frac{n^2+n}{2}}}{Q(n,n)}$, доставляет аппроксимацию порядка 1.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Чумаченко С. А.* Гладкие аппроксимации в C[0,1] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2020. Т. 20, вып. 3. С. 326–342 https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342

[2] *Чумаченко С. А.* Двоичные базисные сплайны в кратномасштабном анализе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 458–471. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-458-471