УДК 517.982.256

Равномерно выпуклые несимметричные пространства[1]

И. Г. Царьков (Москва, Россия)
tsar@mech.math.msu.su

Для равномерно выпуклых несимметричных пространств рассматриваются вопросы о непустых пересечениях вложенной системы выпуклых ограниченных замкнутых множеств. Изучаются вопросы аппроксимативной единственности в этих пространствах для случая непустых замкнутых выпуклых подмножеств.

Ключевые слова: несимметричные пространства, равномерно выпуклые пространства, аппроксимативная единственность.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00204).

Uniformly rotund asymmetrical spaces[1]

I. G. Tsarkov (Moscow, Russia)
tsar@mech.math.msu.su

For uniformly convex asymmetrical spaces, we consider questions about non-empty intersections of a nested system of convex bounded closed sets. Questions about approximative uniqueness in these spaces are studied for the case of non-empty closed convex subsets.

Keywords: asymmetric spaces, uniformly rotund spaces, approximatively uniqueness.

Acknowledgements: this research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (grant no. 22-21-00204).

Введение

В настоящей работе мы будем рассматривать обобщения линейно нормированных пространств, а именно, линейные пространства с некоторой несимметричной нормой $\|\cdot|$ на нем. От несимметричной нормы на линейном пространстве X будем требовать свойства: 1). $\|\alpha x| = \alpha\|x|$ для всех $\alpha \geqslant 0$, $x \in X$; 2). $\|x+y| \leqslant \|x| + \|y|$ для всех $x, y \in X$ и 3). $\|x| \geqslant 0$ для всех $x \in X$, и 3a). $\|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Несимметричная норма задается функционалом Минковского некоторого, вообще говоря, несимметричного тела, содержащего ноль в своем ядре. Отметим также, что вместе с несимметричной нормой $\|\cdot|$ часто удобно рассматривать норму симметризации: $\|x\| := \max\{\|x|, \|-x|\}$ $(x \in X)$. В общем случае пространство с несимметричной нормой удовлетворяет только аксиоме отделимости T_1 (т.е. для любых $a, b \in X$ найдутся их окрестности $O(a)$, $O(b)$ такие, что $a \notin O(b)$, $b \notin O(a)$) и может быть нехаусдорфовым (т.е. может не удовлетворять аксиоме T_2). Более подробно свойства несимметричных пространств можно посмотреть в работах [1]–[3].

В несимметричных пространствах мы выделим подкласс пространств, которые будем называть равномерно выпуклыми. Отметим, что главной целью здесь является нахождение такого определения, при котором большинство свойств равномерно выпуклых пространств (в случае симметричной нормы) переносились бы на существенно несимметричные пространства (норма которых не эквивалентна норме симметризации).

Через $B(x,r)$ и $\mathring{B}(x,r)$ обозначим соответственно "замкнутый" и открытый шар в линейном несимметричном нормированном пространстве или в полунормированном пространстве $\mathcal{X} = (X, \|\cdot|)$ с центром x радиуса r, т.е. соответственно множества $\{y \in X \mid \|y-x| \leqslant r\}$ и $\{y \in X \mid \|y-x| < r\}$. Надо отметить, что шар $B(x,r)$ может не быть замкнутым множеством относительно топологии, порожденной открытыми шарами как предбазой.

Для произвольного множества M некоторого несимметричного нормированного пространства или полунормированого X через $\varrho(y,M)$ $(y \in X,\ M \subset X)$ обозначим расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z\in M} \|z-y|$.

Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y-x| = \varrho(x,M)\}$.

Основные результаты

Перейдем к определению равномерно выпуклых несимметричных пространств.

Положим

$$\Delta(a) := \|f-ag| + a\|g| - \|f|, \quad a \in [0,1].$$

Надо отметить, что из этого определения вытекает, что для любых $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $f, g \in X$: $\|f| = \|g| = 1$ из условия $\|(f+g)/2| \geqslant 1-\delta$ вытекает, что $\|f-\mu g| \leqslant \varepsilon$) для некоторого $\mu \in [1-\varepsilon, 1]$.

Определение 1. *Несимметричное пространство $X = (X, \|\cdot|)$ называется равномерно выпуклым, если для любых $\varepsilon > 0$ и $a \in (0,1]$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $f, g \in X$: $\|f| = \|g| = 1$ из условия $\Delta(a) < \delta$ вытекает, что $f \in B(\mu g, \varepsilon)$ для некоторого $\mu \in [1-\varepsilon, 1]$.*

Определение 2. *Несимметричное пространство $X = (X, \|\cdot|)$ называется право- (лево-) полным, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ из условия, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$*

такое, что $\|x_m - x_n| < \varepsilon$ *для всех* $m \geqslant n \geqslant N$ (*такая последовательность называется фундаментальной*), *вытекает, что существует точка* $x \in X$ *такая, что* $\|x - x_n| \to 0$ ($\|x_n - x| \to 0$) *при* $n \to \infty$. *Право полное пространство будем называть просто полным пространством.*

Теорема 1. *Пусть* N – *непустое замкнутое выпуклое подмножество в несимметричном равномерно выпуклом право-полном пространстве* $X = (X, \|\cdot|)$. *Тогда для всех* $x \in X$ *существует единственная точка* $y \in N$ (*ближайшая для* x *во множестве* N)*:* $\|y - x| = \varrho(x, N)$, *и для любой* (*минимизирующей*) *последовательности* $\{y_n\} \subset N$ *такой, что* $\|y_n - x| \to \varrho(x, N)$ $(n \to \infty)$ *вытекает, что* $\|y_n - y| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Теорема 2. *Пусть* N – *непустое замкнутое выпуклое подмножество в несимметричном равномерно выпуклом лево-полном пространстве* $X = (X, \|\cdot|)$ *с аксиомой отделимости* T_2. *Тогда для всех* $x \in X$ *существует единственная точка* $y \in N$ (*ближайшая для* x *во множестве* N)*:* $\|y - x| = \varrho(x, N)$, *и для любой* (*минимизирующей*) *последовательности* $\{y_n\} \subset N$ *такой, что* $\|y_n - x| \to \varrho(x, N)$ $(n \to \infty)$ *вытекает, что* $\|y_n - y| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Теорема 3. *Пусть* $X = (X, \|\cdot|)$ — *лево-полное равномерно выпуклое несимметричное пространство с аксиомой отделимости* T_2, $\{N_k\}$ – *вложенная последовательность непустых выпуклых ограниченных замкнутых множеств. Тогда пересечение* $N := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} N_k$ *непусто.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *V. Donjuán V., Jonard-Pérez N.* Separation axioms and covering dimension of asymmetric normed spaces // Quaestiones Mathematicae. 2020. Vol. 43, № 4. P. 467–491.

[2] *Cobzas S.* Separation of convex sets and best approximation in spaces with asymmetric norm // Quaestiones Mathematicae. 2004. Vol. 279, № 3(11). P. 275–296.

[3] *Cobzas S.* Functional analysis in asymmetric normed spaces. Basel : Birkhäuser. 2013. 219 p.