УДК 519.642.8

Об одной обратной задаче[1]

Г. В. Хромова, С. Ю. Советникова (Саратов, Россия)
KhromovaGV@info.sgu.ru, SovetnikovaSY@mail.ru

Дан метод решения обратной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения о нахождении равномерных приближений к правой части в случае, когда заданы среднеквадратичные приближения к точному решению.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, обратная задача, регуляризация.

Towards one inverse problem[1]

G. V. Khromova, S. Y. Sovetnikova (Saratov, Russia)
KhromovaGV@info.sgu.ru, SovetnikovaSY@mail.ru

A method is given for solving the inverse problem for an ordinary differential equation on finding the uniform approximations to the right-hand side in the case when the mean square approximations to the exact solution are given.

Keywords: ordinary differential equations, inverse problem, regularization.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)y(x) = f(x), \tag{1}$$

где $y(x) \in C^n[0,1], p_i(x) \in C[0,1], i = 0, \ldots, n$.

Предполагается, что нам известно приближение $y_\delta(x)$ к точному решению $y(x)$, такое, что $\|y_\delta(x) - y(x)\|_{L_2[0,1]} \leq \delta$. Требуется найти равномерные приближения к $f(x)$.

Такая задача в несколько иной постановке(в случае, когда $y_\delta(x)$ - равномерное приближение к $y(x)$), рассматривалась в [1,2] и там предлагались для её решения различные методы регуляризации. В частности, в [2] рассматривался метод, сводящий поставленную задачу к задаче восстановления производных любого порядка функции $y(x)$, заданной с погрешностью, и там применялся простой по конструкции метод, базирующийся на операторах Стеклова. Но этот метод может вызвать трудности в вопросе согласования параметра регуляризации с погрешностью δ при решении прикладных задач, поскольку при больших значениях n на параметр налагаются всё большие ограничения.

С целью устранения этого недостатка здесь предлагается метод, использующий семейство операторов с разрывной областью значений, введённое в [3].

Итак, рассматривается семейство операторов

$$T_{\alpha}^{(m)}y = \begin{cases} T_{\alpha 2}^{(m)}y, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ T_{\alpha 1}^{(m)}y, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где

$$T_{\alpha 2}^{(m)}y = A_m \alpha^{-(2m+1)} \int\limits_{x}^{x+\alpha} \frac{d^m}{dx^m} \left[(t-x)^m (\alpha - (t-x))^m \right] y(t)dt,$$

$$A_m = \left(\sum_{l=0}^{m} (-1)^l \frac{C_m^l}{m+l+1} \right)^{-1}, \; m = 0, 1, \ldots, n.$$

$T_{\alpha 1}^{(m)}$ отличается от $T_{\alpha 2}^{(m)}$ заменой интервала $[x, x+\alpha]$ на $[x-\alpha, x]$, а $(t-x)$ – на $(x-t)$.

Известно [3], что

$$\left\| T_{\alpha}^{(m)}y - y^{(m)} \right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \text{ при } \alpha \to 0 \tag{2}$$

$\left(\|\cdot\|_{L_\infty} = \max \left\{ \|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]} \right\} \right)$
и что

$$\left\| T_{\alpha}^{(m)} \right\|_{L_2 \to L_\infty} = C_m \alpha^{-\frac{2m+1}{2}}. \tag{3}$$

Константа C_m определяется в следующей лемме

Лемма. *Имеет место формула*
$C_m = A_m B_m$, *где* $B_m = (\sum_1 + \sum_2)^{\frac{1}{2}}$,

$\sum_1 = \sum_{k=0}^{m} (C_m^k)^2 \left[(k+1)(k+2)\ldots(k+m) \right]^2 (2k+1)^{-1}$,

$\sum_2 = 2 \sum_{k,l=0 (k \neq l)}^{m} C_m^k C_m^l (-1)^{k+l} (k+1)(k+2)\ldots(k+m)(l+1)(l+2)\ldots (l+m)(k+l+1)^{-1}$

Определим функцию

$$f_\delta^\alpha(x) = \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}(x) T_{\alpha}^{(m)} y_\delta(x). \tag{4}$$

Из (1)-(4) и оценки

$$\left\| T_{\alpha}^{(m)} y_\delta - y^{(m)} \right\|_{L_\infty} \leq \left\| T_{\alpha}^{(m)} \right\|_{L_2 \to L_\infty} \delta + \left\| T_{\alpha}^{(m)} y - y^{(m)} \right\|_{L_\infty}$$

вытекают следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $\alpha = \alpha(\delta)$ *так, что* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta\left(\alpha(\delta)\right)^{-\frac{2n+1}{2}} \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *то* $\left\|f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - f(x)\right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Если существует непрерывная* $y^{(n+1)}(x)$ *при* $x \in [0,1]$, *то справедлива оценка*

$$\left\|f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - f(x)\right\|_{L_\infty} \le 2M^{\frac{2n+1}{2n+3}}\left(P_0C_n\right)^{\frac{2}{2n+3}}\delta^{\frac{2}{2n+3}} +$$

$$+\sum_{m=0}^{n-1} P_{n-m}C_m\left(\frac{P_0C_n}{M}\right)^{-\frac{2m+1}{2n+3}}\delta^{\frac{2(n-m)+2}{2n+3}},$$

где $\alpha(\delta) = \left(\dfrac{P_0C_n}{M}\right)^{\frac{2}{2n+3}}\delta^{\frac{2}{2n+3}}$, $P_k = \|p_k(x)\|_{C[0,1]}$, $k = 0,\ldots,n$, $M = \sum\limits_{m=0}^{n} P_{n-m}M_m$, $M_m = \left\|y^{(m+1)}(x)\right\|_{C[0,1]}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Денисов А. И.* Введение в теорию обратных задач // Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1994, 206 с.

[2] *Хромов А. А.* Решение одной обратной задачи // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16., вып. 2. С. 180–185.

[3] *Хромова Г. В.* Об одном семействе операторов с разрывной областью значений // Современные проблемы теории функций и их приложения. Мат-лы 20-й межд. Сарат. зим. школы (Саратов, 28 янв-01 февр 2020 г.) Саратов: Изд-во “Научная книга”, 2020. С. 440–443.