УДК 512.518.68

Преобразование типа свертки и приближения функций в пространстве S_p[1]

Ю. Х. Хасанов, Ё. Ф. Касымова (Душанбе, Таджикистан)
yukhas60@mail.ru

Рассматривается 2π – периодическая функция $f(x)$ принадлежащая пространству $S_p(1 \leq p \leq \infty)$ на периоде и преобразование типа свертки, содержащее некоторую действительную функцию ограниченной вариации на всей вещественной оси. Это преобразование представляет собой обобщение некоторых конкретных преобразований, связанных различными характеристиками рассматриваемой функции. В порядке обобщения некоторых из результатов, касающихся особенностей интегральной метрики $S_p(1 \leq p \leq \infty)$, с учетом особенности случая $1 \leq p \leq \infty$, здесь исследуется вопрос о зависимости между этим преобразованием и наилучшими приближениями функции тригонометрическими полиномами. Получены оценки сверху и снизу для рассматриваемой свертки в зависимости от величины наилучшего приближения функций $f(x) \in S_p(1 \leq p \leq \infty)$.

Ключевые слова: периодическая функция, ряд Фурье, преобразование типа свертки, наилучшие приближения, преобразование Фурье, тригонометрические полиномы, коэффициенты Фурье, функции ограниченной вариации.

Convolution type transformation and approximation of functions in the space S_p[1]

Yu. Kh. Khasanov, Y. F. Khasimnova (Dushanbe, Tajikistan)
yukhas60@mail.ru

We consider a 2π – periodic function $f(x)$ belonging to the space $S_p(1 \leq p \leq \infty)$ on the period and a convolution type transformation containing some real function of bounded variation on the entire real axis. This transformation is a generalization of some specific transformations related to various characteristics of the function under consideration. As generalization of some results concerning features of the integral S_p- metric $S_p(1 \leq p \leq \infty)$, taking into account the peculiarity of the case $1 \leq p \leq \infty$, the question of the relationship between this transformation and the best approximations of the function by trigonometric polynomials is investigated here. Top and bottom estimates for the considered convolution are obtained depending on the value of the best approximation of the functions $f(x) \in S_p(1 \leq p \leq \infty)$.

Keywords: periodic function, Fourier series, convolution type transformation, best approximations, Fourier transform, trigonometric polynomials, Fourier coefficients, bounded variation functions.

Пусть S_p – пространство периодических периода 2π интегрированных по Лебегу функций $f(x)$, для которых сходится ряд

$$\sum_{k\in Z} |c_k|^p \ \ (c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) exp(-ikx) dx),$$

[1]Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

[1]This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

с нормой

$$\|f(x)\|_{S_p} = (\sum_{k\in Z} |c_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty \ \ (1 \le p \le \infty),$$

$$\|f(x)\|_{S_p} = \max_{v\in Z} |c_v| \ \ (p = \infty).$$

Вопросы приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве S_p достаточно полно исследованы в работах А. И. Степанца [1], [2].

С помощью функции $\sigma(u)$, которая задана на всей действительной оси и тождественно не равна нулю на $(-\infty, \infty)$, и которая является функцией ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$, для каждой функции $f(x) \in S_p$ рассматривается следующее преобразование

$$F_\sigma(f; x, h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - hu) d\sigma(u),$$

где h – действительный параметр. При этом, указанная выше функция $\sigma(u)$ удовлетворяет еще условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(u) = 0, \ \ \widehat{\sigma}(-u) = \widehat{\sigma}(u)$$

где

$$\widehat{\sigma}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-iux) d\sigma(u).$$

Такие общие преобразования, которые принято называть преобразованиями типа свертки для классических Лебеговых пространств $L_p(1 \le p < \infty)$ ранее рассматривались в работах [3] – [6].

С помощью указанного преобразования $F_\sigma(f; x, h)$, для каждой функции $f(x) \in S_p$ рассматривается характеристика $D(f; \sigma; h; p) = \|F_\sigma(f; x, h)\|_{s_p}$.

Нетрудно заметить, что ряд Фурье преобразования $F_\sigma(f; x, h)$ имеет вид $\sum\limits_{k\in Z} c_k \widehat{\sigma}(kh) exp(ikx)$. Благодаря этому, имеет место неравенство $D(f; \sigma; h; p) \le V(\sigma)\|f(x)\|_{S_p}$, где $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |d\sigma(u)| = V(\sigma) < \infty$.

Известно [1], что наилучшим приближением функции $f(x) \in S_p$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(x)$ порядка не выше $n-1$ в метрике пространства $S_p(1 \leq p < \infty)$ является частная сумма Фурье порядка не выше $n-1$, т.е.

$$E_n(f)_{S_p} = \inf_{T_{n-1}} \|f(x) - T_{n-1}(x)\|_{S_p} = \|f(x) - S_{n-1}(f;x)\|_{S_p},$$

где

$$S_{n-1}(f;x) = \sum_{|k| \leq n-1} c_k \cdot \frac{exp(ikx)}{\sqrt{2\pi}},$$

c_k- коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Таким образом

$$E_n(f)_{S_p} = \left(\sum_{|k| \leq n-1} |c_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь сформулируем следующие утверждения, которые устанавливают оценки $W(f;\sigma;t;p)$ и $D(f;\sigma;h;p)$ через величины наилучшего приближения функции $f(x) \in S_p$.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x) \in S_p$, а последовательность целых чисел $\{n_\nu\}$ такая, что*

$$n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_\nu < n_{\nu+1} < \ldots \quad (\nu \in Z, n_{-\nu} = -n_\nu).$$

Тогда, при $n_{m+1} \leq \frac{1}{h}$ имеет место оценка

$$D^p(f;\sigma;h;p) \leq \left| \sum_{|\nu| \leq m} \sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} E_k^p(f)_{S_p}(|\widehat{\sigma}(kh)|^p - |\widehat{\sigma}((k-1)h)|^p) \right| +$$

$$+E_{n_{m+1}}^p(f)_{S_p}(V^p(\sigma) - |\widehat{\sigma}((n_{m+1}-1)h)|^p).$$

Теорема 2. *В предположениях условий теоремы 1 справедлива следующая оценка*

$$D^p(f;\sigma;h;p) + V^p(\sigma)E_{n_{m+1}-1}^p(f)_{S_p} \geq$$

$$\geq \sum_{|\nu| \leq m-1} \sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} E_k^p(f)_{S_p}(|\widehat{\sigma}(kh)|^p - |\widehat{\sigma}((k-1)h)|^p).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p. Киев : Препринт НАН Украины. Ин-т математики, 2000. 52 с.

[2] *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ. Киев : Препринт НАН Украины. Ин-т математики, 2001. 85 с.

[3] *Shapiro И. О.* A tauberian related to approximation theory // Acta. Math. 1968. Vol. 120, № 3–4. P. 279–292.

[4] *Shapiro И. О., Boman J.* Compaison theorems for a generalized modules of continuety // Bill. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 75, № 6. P. 1266–1268.

[5] *Тиман М. Ф.* Наилучшие приближения периодических функций тригонометрическими полиномами и преобразование типа свертки // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198, № 4. С. 776–779.

[6] *Хасанов Ю. Х., Касымова Ё. Ф.* О связи преобразования типа свертки и наилучшего приближения периодических функций // Матем. физики и комп. моделирование. 2021. Т. 24, № 1. С. 5–15.