УДК 517.956.2

Условия существования нетривиальных решений полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях[1]

В. В. Филатов (Волгоград, Россия)
filatov@volsu.ru

В работе исследуются решения полулинейного уравнения $\Delta u - u\phi(|u|) = 0$ на некомпактных римановых многообразий. Введено понятие функции Лиувилля ассоциированной с полулинейным уравнением, функции Лиувилля внешности компакта, ёмкостного потенциала компакта. Доказано, что из равенства нулю функции Лиувилля следует равенство функции Лиувилля внешности компакта и ёмкостного потенциала.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, ёмкостные методы, римановы многообразия, функция Лиувилля.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90110).

Conditions for the existence of nontrivial solutions of semilinear elliptic equations of non-compact Riemannian manifolds[1]

V. V. Filatov (Volgograd, Russia)
filatov@volsu.ru

This paper investigates solutions of the semilinear equation $\Delta u - u\phi(|u|) = 0$ on non-compact Riemannian manifolds. The concept of the Liouville function associated with a semilinear equation, the Liouville function of the exterior of a compact set, and the capacitive potential of a compact set are introduced. It is proved that the equality of the Liouville function to zero implies the equality of the Liouville function of the exterior of the compact and the capacitive potential.

Keywords: elliptic equations, capacitive methods, Riemannian manifolds, Liouville function.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-31-90110).

Введение

Данная работа посвящена исследованию свойств ограниченных решений полулинейных эллиптических уравнений

$$\Delta u - u\phi(|u|) = 0 \tag{1}$$

на произвольных некомпактных римановых многообразиях. Предполагается, что $\phi(\xi) > 0, \xi \in \mathbb{R}$ - монотонно неубывающая, непрерывно дифференцируемая функция. А именно, получены условия существования нетривиальных ограниченных решений уравнения (1).

Истоки данной тематики восходят к классификационной теории некомпактных римановых многообразий. Теорема об униформизации утверждает, что всякая односвязная риманова поверхность конформно эквивалентна одной из следующих модельных поверхностей:

- сфере (поверхность эллиптического типа);
- комплексной плоскости (поверхность параболического типа);
- единичному диску (поверхность гиперболического типа).

Отличительным свойством поверхностей параболического типа является выполнением на них теоремы типа Лиувилля. Известно, что на поверхности параболического типа всякая положительная супергармоническая функция является тождественной постоянной. Данное свойство поверхностей параболического типа послужило основой для распространения понятия параболичности на римановы многообразия размерности выше двух. А именно, говорят что многообразие M имеет параболический тип, если всякая ограниченная снизу супергармоническая функция на M есть тождественная постоянная.

Особую эффективность в определении типа римановых многообразий показала ёмкостная техника см. напр [1–3]. А. А. Григорьяном в работе [4] было доказано, что параболичность типа риманова многообразия эквивалентна тому, что вариационная ёмкость всякого (некоторого) компакта равна нулю.

Очевидно, что классификационная теория римановых многообразий естественным образом приводит к теоремам типа Лиувилля. Считающаяся классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что в $\mathbb{R}^n$ всякая ограниченная гармоническая функция является тождественной постоянной.

В настоящее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M задан некоторый класс функций A и эллиптический оператор L, говорят, что на M выполнено (A, L) - лиувиллево свойство, если всякое решение уравнения $Lu = 0$ из класса A тривиально.

Данной тематике посвящено огромное количество работ [5–7], рассматриваются как различные классы A (ограниченные, имеющий конечный интеграл энергии, суммируемые, положительные и т.д.) так и различные эллиптические уравнения, например:

- уравнение Лапласа $\Delta u = 0$;
- стационарное уравнение Шрёдингера $\Delta u - c(x)u = 0$;
- полулинейные эллиптические уравнения $\Delta u - g(x,u) = 0$.

Приведём некоторые примеры. А. А. Григорьяном в работе [1] с помощью понятия массивных множеств была получена оценка размерности пространств ограниченных гармонических функций.

Позже с помощью понятия $c(x)$ - массивных множеств в работе А. А. Григорьяна и А. Г. Лосева [8] была получена оценка размерности пространств ограниченных решений стационарного уравнения Шрёдингера.

В работе А. Г. Лосева, В. В. Филатова [9] было доказано, что на многообразии существует нетривиальное ограниченное решение полулинейного уравнения $Lu = \Delta u - g(x,u) = 0$ тогда и только тогда, когда на многообразии существует L - массивное подмножество.

В работе Е. А. Мазепы [10] доказано, что на многообразии существуют нетривиальные ограниченные решения полулинейного уравнения $\Delta u - g(x,u) = 0$ тогда и только тогда, когда на многообразии существует нетривиальные ограниченные решения стационарного уравнения Шрёдингера $\Delta u - u = 0$.

Целью данной работы является получение условий существования нетривиальных ограниченных решений полулинейного уравнения (1).

Условия существований нетривиальных ограниченных решений полулинейного уравнения

Пусть M - произвольное некомпактное риманово многообразие, B - компакт в M, $\{B_k\}$ - гладкое исчерпание M то есть последовательность предкомпактных открытых множеств, таких что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k = M, \overline{B_k} \subset B_{k+1}$.

Рассмотрим последовательность решений задач Дирихле в $B_k \setminus B$: $Lh_k = \Delta h_k - h_k\phi(|h_k|) = 0, h_k|_{\partial B} = 1, h_k|_{\partial B_k} = 1$. Последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ в силу принципа максимума является убывающей и ограниченной. Предельную функцию $h_B = \lim\limits_{k\to\infty} h_k$ будем называть функцией Лиувилля внешности компакта.

Аналогично, предельную функцию последовательности решений задач Дирихле в $B_k \setminus B$: $Ls_k = \Delta s_k - h_k\phi(|s_k|) = 0, s_k|_{\partial B} = 1, s_k|_{\partial B_k} = 0$ будем называть ёмкостным потенциалом компакта B и обозначать s_B.

Предельную функцию последовательности решений задач Дирихле в B_k: $LH_k = \Delta H_k - H_k\phi(|H_k|) = 0, H_k|_{\partial B_k} = 1$ будем называть функцией

Лиувилля и обозначать H. Несложно показать, что H не зависит от выбора исчерпания.

Предельную функцию последовательности решений задач Дирихле в $B_k \setminus B$: $Lu_k = \Delta u_k - u_k\phi(|u_k|) = 0, u_k|_{\partial B} = 0, u_k|_{\partial B_k} = 1$ будем называть гармонической мерой B и обозначать u_B.

Теорема 1. *На многообразии M всякое ограниченное решение уравнения (1) есть тождественный ноль, тогда и только тогда когда $H \equiv 0$.*

Теорема 2. *Функция Лиувилля $H \equiv 0$ тогда и только тогда, когда для всякого компакта B $u_B \equiv 0$.*

Теорема 3. *Если Функция Лиувилля $H \equiv 0$ то для всякого компакта B $h_B \equiv s_B$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 36. P. 135–249.

[2] *Кесельман В. М.* Понятие и критерии емкостного типа некомпактного риманова многообразия на основе обобщенной емкости // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2019. Т. 22, № 2. С. 21–32.

[3] *Korolkov S. A., Losev A. G.* Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // Mathematische Zeitshrift. 2012. Vol. 272, № 1. P. 459–472.

[4] *Григорьян А. А.* О существовании положительных фундаментальных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях // Матем. сб. 1985. Т. 128(170), № 3(11). С. 349–358.

[5] *Grigor'yan A., Verbitsky I.* Pointwise estimates of solutions to semilinear elliptic equations and inequalities // J. d'Analyse mathematique. 2019. Vol. 131, № 2. P. 559–601.

[6] *Murata M., Tsuchida T.* Uniqueness of L 1 harmonic functions on rotationally symmetric Riemannian manifolds // Kodai Mathematical Journal. 2014. Vol. 37, № 1. P. 1–15.

[7] *Yau S. T.* Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifold and Their Applications to Geometry // Indiana University Mathematics Journal. 1976. Vol. 25, № 7. P. 659–670.

[8] *Григорьян А. А., Лосев А. Г.* О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20, № 3, С. 34–42.

[9] *Лосев А. Г., Филатов В. В.* О некоторых емкостных характеристиках некомпактных римановых многообразий // Изв. вузов. Матем. 2021. №3. С. 65–75.

[10] *Мазепа Е. А.* Лиувиллево свойство и краевые задачи для полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 1(53). С. 165–179.