

# О приложении качественной теории дифференциальных уравнений к некоторым задачам тепломассопереноса<sup>1</sup>

Д. В. Туртин\* (Иваново, Россия),  
М. А. Степович\*\*, В. В. Калманович\*\*\* (Калуга, Россия)  
\*turtin@mail.ru, \*\*m.stepovich@rambler.ru, \*\*\*v572264@yandex.ru

Изучены возможности приложения качественной теории дифференциальных уравнений к некоторым задачам тепломассопереноса в однородных материалах и многослойных планарных структурах. Рассмотрение проведено на примере математических моделей стационарного процесса диффузии неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных широким пучком киловольтных электронов в полупроводниках. Рассмотрены вопросы корректности этих математических моделей и приведён обзор результатов исследований таких моделей за последнее время.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, тепломассоперенос, дифференциальные уравнения, качественные оценки.

*Благодарности:* работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

# On the application of the qualitative theory of differential equations to a problem of heat and mass transfer<sup>1</sup>

D. V. Turtin\* (Ivanovo, Russia),  
M. A. Stepovich\*\*, V. V. Kalmanovich\*\*\* (Kaluga, Russia)  
\*turtin@mail.ru, \*\*m.stepovich@rambler.ru, \*\*\*v572264@yandex.ru

The possibilities of applying the qualitative theory of differential equations to some problems of heat and mass transfer in homogeneous materials and multilayer planar structures are studied. The consideration is carried out on the example of mathematical models of the stationary process of diffusion of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide beam of kilovolt electrons in semiconductors. The problems of the correctness of these mathematical models are considered and an overview of the results of studies of such models in recent years is given.

*Keywords:* mathematical modeling, heat and mass transfer, differential equations, qualitative estimates.

*Acknowledgements:* this work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19–03–00271), as well as by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Kaluga Region (project no. 18–41–400001).

## Введение

Качественная теория дифференциальных уравнений использована для анализа математических моделей стационарной диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных широким

<sup>1</sup>Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

<sup>1</sup>This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

электронным пучком в однородных и многослойных полупроводниковых материалах. Использование широких электронных пучков позволяет свести эти задачи к одномерным и описать эти математические модели обыкновенными дифференциальными уравнениями. Ранее вопросы количественной оценки функциональных зависимостей [1, 2], в нашем случае, влияния внешнего воздействия на распределение ННЗ в результате их диффузии в полупроводнике, в сочетании с рассмотрением единственности решения дифференциальных уравнений теплопереноса и корректности используемых математических моделей рассматривались весьма редко. Наиболее подробно такие задачи рассматривались для остро сфокусированных пучков [3, 4]: моделировалась нестационарная диффузия неравновесных ННЗ в методе времяпролетной катодолюминесценции полупроводников, проводилась оценка влияния изменений во внешнем воздействии на распределение ННЗ и доказательство корректности рассматриваемой модели. Однако для широких электронных пучков количественный анализ подобных задач ранее не проводился, пожалуй, за исключением рассмотрения некоторых аспектов диффузии ННЗ в однородной полупроводниковой мишени [5]. Что касается диффузии ННЗ в многослойных планарных структурах, то для таких объектов обсуждались лишь некоторые возможности качественного анализа [6, 7].

## Постановка задачи

В настоящей работе методами математического моделирования продолжены исследования диффузионных процессов, обусловленных взаимодействием широких электронных пучков с полупроводниками. Объектами изучения являются математические модели, описывающие процессы диффузии неравновесных ННЗ, генерированных широким пучком киловольтных электронов в однородных материалах [8, 9] и многослойных планарных структурах с произвольным числом слоев [6, 7]. Основное внимание уделялось влиянию правой части дифференциальных уравнений, функции возбуждения ННЗ  $\rho(z)$ , на решения дифференциальных уравнений диффузии  $\Delta p(z)$ , описывающих распределения профиффундировавшихся неравновесных ННЗ.

## Основные результаты

Для рассматриваемых математических моделей диффузии ННЗ в однородных полупроводниковых материалах [8, 9] и для многослойных полупроводниковых планарных структур с произвольным числом слоев [6, 7]

получены следующие оценки: если

$$|\rho_2(z) - \rho_1(z)| \leq \varepsilon,$$

то  $\forall z \in [0, \infty)$

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \leq \varepsilon C,$$

где  $C = \text{const}$ , зависящая от вида и коэффициентов дифференциального уравнения, электрофизических параметров полупроводниковой мишени.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. А. Д. Мышкиса и О. А. Олейник. Изд. седьмое, исправленное. М.: Изд-во Московского университета, 1984. 296 с.
- [2] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. литературы, 1967. 436 с.
- [3] *Stepovich Mikhail A., Turtin Dmitry V., Seregina Elena V., Kalmanovich Veronika V.* On the correctness of mathematical models of time-of-flight cathodoluminescence of direct-gap semiconductors // ITM Web of Conferences. 2019. Vol. 30. Art. No. 07014.
- [4] *Turtin D. V., Seregina E. V., Stepovich M. A.* Qualitative Analysis of a Class of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in a Condensed Material // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2020. Vol. 259, iss. 1. P. 166–174.
- [5] *Туртин Д. В., Степович М. А., Калманович В. В., Картанов А. А.* О корректности математических моделей диффузии и катодолуминесценции // Таврический вестник информатики и математики. 2021. № 1(50). С. 81–100.
- [6] *Калманович В. В., Сeregина Е. В., Степович М. А.* Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами // Известия РАН. Серия физическая. 2020. Т. 84, № 7. С. 1020–1026.
- [7] *Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A.* Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Phenomena Caused by Interaction between Electron Beams and Planar Semiconductor Multilayers // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2020. Vol. 84, iss. 7. P. 844–850.
- [8] *Белов А. А., Петров В. И., Степович М. А.* Использование модели независимых источников для расчета распределений неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком // Известия РАН. Серия физическая. 2002. Т. 66, № 9. С. 1317–1322.
- [9] *Belov A. A., Petrov V. I., Stepovich M. A.* Model of independent sources used in calculation of minority charge carriers generated by electron beam in semiconductor // Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Ser. Fizicheskaya. 2002. Vol. 66, №. 9. P. 1317–1323.