УДК 517.518.82

# О поведении полиномов Канторовича на комплексной плоскости в модельном примере симметричного модуля[1]

**И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, И. В. Окорочков**
**(Москва, Россия)**
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, ivan.okorochkov@yandex.ru

Как известно, один из содержательных разделов конструктивного анализа связан с изучением полиномов, аппроксимирующих простые негладкие функции. В настоящей заметке дан краткий обзор наших недавних результатов о поведении на плоскости $\mathbb{C}$ полиномов Канторовича, взятых от симметричного модуля. Указано точное множество сходимости таких полиномов и найдена их скорость сходимости к соответствующей предельной функции. Отдельно обсуждается вопрос распределения нулей полиномов Канторовича. Центральную роль в исследовании играет специфика порождающей функции, благодаря которой удается установить прямую связь между полиномами Канторовича и более простыми полиномами Бернштейна.

*Ключевые слова:* полиномы Канторовича, полиномы Бернштейна, симметричный модуль, сходимость на комплексной плоскости, скорость сходимости, распределение нулей.

# On the behavior of Kantorovich polynomials on the complex plane in a model example of a symmetric module function[1]

**I. V. Tikhonov, V. B. Sherstyukov, I. V. Okorochkov**
**(Moscow, Russia)**
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, ivan.okorochkov@yandex.ru

The question of approximation of simple continuous non-smooth functions by classical systems of polynomials plays a special role in the constructive analysis. The note gives a short review of our recent results on the behavior of Kantorovich polynomials on $\mathbb{C}$ for a symmetric module function. The exact set of convergence of such polynomials is indicated, and the rate of convergence to the corresponding limit function is found. The problem of the distribution of zeros of Kantorovich polynomials is discussed. The central role in the study is played by the specificity of the generating function, which allows to establish a direct connection between Kantorovich polynomials and simpler Bernstein polynomials.

*Keywords:* Kantorovich polynomials, Bernstein polynomials, symmetric module function, convergence on the complex plane, rate of convergence, distribution of zeros.

Возьмем стандартный отрезок $[0,1]$ и на нем симметричный модуль

$$f(x) = |2x-1|, \quad x \in [0,1]. \tag{1}$$

Рассмотрим полиномы Бернштейна

$$B_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \, z^k (1-z)^{n-k} \tag{2}$$

с нумерацией $n \in \mathbb{N}$ и полиномы Канторовича

$$K_n(f,z) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(u)\,du \cdot C_n^k\, z^k (1-z)^{n-k} \tag{3}$$

с нумерацией $n \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$. Здесь $C_n^k$ — обычные биномиальные коэффициенты. Переменную $z$ считаем комплексной. Общую теорию полиномов Бернштейна и некоторые базовые сведения о полиномах Канторовича см. в [1]–[3]. Используем сейчас определения (2), (3) применительно к конкретной порождающей функции (1) — модельному примеру в теории аппроксимации.

Полиномы Бернштейна для функции (1) изучены в работах [4]–[8]. Исследование соответствующих полиномов Канторовича только начинается. Приведем характерные результаты о поведении полиномов $K_n(f,z)$ на плоскости $\mathbb{C}$, основанные на специальной связи между полиномами Бернштейна и Канторовича при выборе $f(x) = |2x-1|$.

Напомним (см. [4], [5]), что полиномы Бернштейна от симметричного модуля обладают следующим свойством попарного склеивания

$$B_{2m}(f,z) = B_{2m+1}(f,z), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для полиномов Канторовича прямого аналога такого свойства нет: здесь возникают две серии $K_{2m}(f,z)$ и $K_{2m+1}(f,z)$, по-разному выражающиеся через полиномы Бернштейна.

**Теорема 1.** *Для функции $f(x) = |2x-1|$, взятой на $[0,1]$, полиномы Бернштейна и Канторовича связаны соотношениями*

$$K_{2m}(f,z) = \frac{2m}{2m+1}\, B_{2m+1}(f,z) + \frac{1}{2(2m+1)}\, 2^{-2m} C_{2m}^{m} (4z(1-z))^m,$$

$$K_{2m+1}(f,z) = \frac{2m+1}{2m+2}\, B_{2m+1}(f,z),$$

*действующими при всех $m \in \mathbb{N}_0$.*

Используя данное утверждение вместе с известными свойствами полиномов Бернштейна, можно в примере (1) весьма полно охарактеризовать поведение полиномов Канторовича на комплексной плоскости.

**Теорема 2.** *Для функции $f(x) = |2x-1|$, взятой на $[0,1]$, последовательность $K_n(f,z)$ при $n \to \infty$ сходится равномерно на компакте*

$$D \equiv \{z \in \mathbb{C}\colon\ |4z(1-z)| \leqslant 1\} \tag{4}$$

*к функции*

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1-2z, & z \in D_1 = D \cap \{\operatorname{Re} z \leqslant 1/2\}, \\ 2z-1, & z \in D_2 = D \cap \{\operatorname{Re} z \geqslant 1/2\}. \end{cases} \tag{5}$$

*Во внешних точках $z \in \mathbb{C} \setminus D$ последовательность $K_n(f,z)$ расходится при $n \to \infty$, точнее, независимо расходятся обе подпоследовательности $K_{2m}(f,z)$ и $K_{2m+1}(f,z)$.*

Множество (4) называется *компактом Канторовича* — оно такое же, как множество сходимости полиномов Бернштейна (2) в примере (1) (см. [7], [8]). Однако характер сходимости полиномов Бернштейна и Канторовича к общей предельной функции (5) будет существенно разным.

Как показывают исследования, для полиномов Бернштейна на множестве $D$ надо различать три случая: а) в особой точке $z = 1/2$ скорость сходимости низкая, степенная, порядка $n^{-1/2}$; б) в других граничных точках из множества $|4z(1-z)| = 1$ скорость сходимости более высокая, порядка $n^{-3/2}$; в) во внутренних точках из $D$, т.е. при $|4z(1-z)| < 1$, скорость сходимости экспоненциальная, порядка $n^{-3/2}\,|4z(1-z)|^n$ (за некоторыми подробностями мы отсылаем к [7], [8]).

Для полиномов Канторовича получаем такое утверждение.

**Теорема 3.** *В ситуации теоремы* 2 *во всех точках $z \in D \setminus \{1/2\}$ справедлива асимптотика уклонения полиномов Канторовича от их предельной функции*

$$K_n(f,z) - \varphi(z) \sim -\frac{1}{n}\,\varphi(z), \quad n \to \infty. \tag{6}$$

*В особой точке $z = 1/2$ действует более медленный степенной закон*

$$K_n(f,1/2) - \varphi(1/2) = K_n(f,1/2) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Асимптотические формулы (6), (7) дают общее представление о сходимости полиномов Канторовича на компакте $D$ и допускают дальнейшие уточнения. Отметим, в частности, что важные значения $K_n(f,1/2)$ из формулы (7) находятся в явном виде:

$$K_{2m}(f,1/2) = \frac{4m+1}{4m+2}\,2^{-2m}\,C_{2m}^{m}, \quad K_{2m+1}(f,1/2) = 2^{-2m-2}\,C_{2m+2}^{m+1}, \tag{8}$$

где $m \in \mathbb{N}_0$. Соотношения (8) легко следуют из теоремы 1 с учетом того, что $B_{2m+1}(f,1/2) = 2^{-2m}\,C_{2m}^{m}$ при $m \in \mathbb{N}_0$.

Отдельный интерес представляет вопрос распределения нулей полиномов Канторовича. Укажем здесь следующий отправной результат.

**Теорема 4.** *Для функции* $f(x) = |2x - 1|$, *взятой на* $[0, 1]$, *все нули полиномов* $K_n(f, z)$ *при* $n \geqslant 2$ *являются простыми и расположены вне компакта* $D$ *из формулы* (4). *Полиномы* $K_0(f, z)$ *и* $K_1(f, z)$ *тождественно равны константе* $1/2$ *и нулей не имеют.*

Доказательство данного утверждения основано на теореме 1 и некоторых известных результатах о нулях полиномов Бернштейна (см. [6], [7]).

Отметим, что теория распределения нулей полиномов Бернштейна была инициирована работой [9] и существенно развита в [10]–[12]. Есть основания полагать, что многие прежние подходы допускают перенос на полиномы Канторовича.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto : University of Toronto Press, 1953. x+130 p.

[2] *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin, Heidelberg, N.Y. : Springer-Verlag, 1993. x+450 p.

[3] *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ имени А. И. Герцена, 1990. 64 с.

[4] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник Челябинского гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

[5] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

[6] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Задача о нулях полиномов Бернштейна на модельном примере симметричного модуля // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 18-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С. 271–275.

[7] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее прилож. Тематич. обзоры ВИНИТИ. 2019. Т. 170. С. 71–117.

[8] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна: новые продвижения и возможные обобщения // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 409–414.

[9] *Новиков И. Я.* Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки. 2002. Т. 71, № 2. С. 239–253.

[10] *Тихонов И. В., Цветкович Д. Г., Шерстюков В. Б.* Компьютерное исследование аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 4. С. 151–173.

[11] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Как выглядят аттракторы

нулей для классических полиномов Бернштейна // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2017. № 2. С. 59–73.

[12] *Цветкович Д. Г.* Подробный атлас аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Челябинский физ.-матем. журнал. 2018. Т. 3, № 1. С. 58–89.