УДК 517.547.2, 517.95, 517.983.23

О некоторых трансцендентных уравнениях, важных для математической физики[1]

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, М. Алмохамед
(Москва, Россия)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, mssrmtz@gmail.com

Обсуждаются трансцендентные уравнения вида $\sin z = z$ и $\operatorname{sh} z = z$, исследование которых восходит к работе Харди (1902). Приводятся уточненные результаты о распределении корней на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Отмечается связь с теорией целых функций типа Миттаг-Леффлера. Интерес к тематике был вызван вопросом о кратных нулях одной целой функции порядка $\rho = 1/2$. Эта последняя возникла из спектральных соотношений в обратных задачах математической физики.

Ключевые слова: трансцендентные уравнения, распределение корней, целые функции типа Миттаг-Леффлера, целые функции порядка 1/2, кратные нули, обратные задачи математической физики..

Благодарности: работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

On some transcendental equations that matter for mathematical physics[1]

I. V. Tikhonov, V. B. Sherstyukov, M. Almohamed
(Moscow, Russia)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, mssrmtz@gmail.com

The transcendental equations of the form $\sin z = z$ and $\operatorname{sh} z = z$ are discussed. Their study goes back to Hardy's paper (1902). We present more precise results on the distribution of roots on the set $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. A connection with the theory of entire functions of Mittag-Leffler type is noted. Our interest in the subject was prompted by a question on multiple zeros of one entire function of the order $\rho = 1/2$. This function was obtained from spectral relations in inverse problems of mathematical physics.

Keywords: transcendental equations, distribution of roots, Mittag-Leffler entire functions, entire functions of the order 1/2, multiple zeros, inverse problems of mathematical physics..

Acknowledgements: the work was partially supported by Ministry of Education and Science of Russian Federation as part of a program of Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics by agreement No. 075-15-2019-1621.

В 1902 г. опубликована работа [1], посвященная корням уравнения

$$\sin z = z \tag{1}$$

на множестве $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Там же, в [1], введено обобщенное уравнение

$$\sin z = az \tag{2}$$

с параметром $a \neq 0$. На заложенной теоретической основе проводились дальнейшие исследования по численному анализу корней трансцендентных уравнений (1), (2), их обобщений и аналогов (см. [2]–[7]). Отметим, что подобные уравнения возникают в математической физике при рассмотрении спектральных задач механики сплошной среды (см. [8]–[11]). Их также используют как важный иллюстративный материал в теории целых функций (см. [12, с. 64–68]).

Наряду с (1) встречается «гиперболическое» уравнение вида

$$\operatorname{sh} z = z. \tag{3}$$

Исходная версия (1) получается из (3) при замене z на iz. Поэтому множества корней этих уравнений связаны простым поворотом на угол $\pi/2$. По причинам технического характера нам удобнее сейчас иметь дело с уравнением (3). Будем рассматривать его на множестве $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Отметим сначала факты общего характера. Легко проверяется, что уравнение (3) не имеет корней $z \neq 0$ на осях Re и Im. При этом корней бесконечно много, и они образуют счетный набор на плоскости. Учитывая естественные симметрии, корни уравнения (3) можно представить в виде

$$\pm z_n, \qquad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad z_{-n} = \overline{z}_n. \tag{4}$$

Здесь основная серия корней

$$z_1,\ z_2,\ \ldots\ ,\ z_n,\ \ldots \tag{5}$$

расположена в первом квадранте $\mathbb{C}_{++} \equiv \{z = x + iy\colon\ x > 0,\ y > 0\}$ и упорядочена по возрастанию модулей. Понятно, что нужно дать описание лишь для этой основной серии (5).

При анализе уравнения (3) полезно учитывать связь

$$\frac{\operatorname{sh} z - z}{z^3} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m+3)!} = E_{1/2}(z^2; 4) \tag{6}$$

с соответствующей функцией типа Миттаг-Леффлера. Напомним, что это классическое семейство (см. [13]) образуют целые функции

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho^{-1}m + \mu)}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

с параметрами $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ (и Γ-функцией в знаменателе). Тем самым, к исследованию множества (4) можно привлекать общие результаты монографии [14]. Например, из указанной там теоремы 4.3.1 следует, что основная серия корней (5) локализуется в правой полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1) = 2.2955\dots\ . \tag{7}$$

Затем, применяя теорему 2.1.1, после несложных вычислений получим для основной серии (5) следующую асимптотическую формулу

$$z_n = \ln(4n\pi) + \frac{1}{4n} + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\ln(4n\pi)}{2n\pi}\right) + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right), \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Формула (8) согласуется с результатом [12, с. 67] (если переделать ответ из книги [12] на уравнение (3) вместо разобранного там уравнения (2)).

Отметим близкий шаблон асимптотики из работы [9] (см. также [1]), откуда извлекается приближенная формула

$$z_n = \ln((4n+1)\pi) + \delta_n + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{2\ln((4n+1)\pi)}{(4n+1)\pi} + \varepsilon_n\right) \tag{9}$$

при $n \in \mathbb{N}$ со значениями $\delta_n, \varepsilon_n \in \mathbb{R}$, такими, что $\delta_n \to 0$ и $\varepsilon_n \to 0$, когда $n \to \infty$. На первый взгляд, вариант (8) кажется проще и даже чуть сильнее, но именно представление (9) позволяет вывести по-настоящему точный результат.

Теорема 1. *В формуле* (9) *для основной серии* (5) *корней уравнения* (3) *при всех номерах* $n \in \mathbb{N}$ *действуют оценки*

$$0 < \delta_n < \frac{2\ln^2\big((4n+1)\pi\big)}{(4n+1)^2\pi^2}, \qquad |\varepsilon_n| < \frac{4\ln^3\big((4n+1)\pi\big)}{(4n+1)^3\pi^3}. \tag{10}$$

Такое сочетание формулы (9) с оценками (10) дает весьма полное представление о поведении корней уравнения (3). Как видим, итоговый ответ оказывается *неасимптотическим*, фактически применимым при всех номерах $n \in \mathbb{N}$. Укажем еще один неасимптотический результат несколько иного характера.

Теорема 2. *Для уравнения* (3) *рассматриваем основную серию корней* (5) *в первом квадранте* $\mathbb{C}_{++} \equiv \{z = x + iy\colon\ x > 0,\ y > 0\}$. *Тогда справедливы утверждения.*

- *Все корни* (5) *находятся на кривой* $\gamma \subset \mathbb{C}_{++}$ *с уравнением*

$$y = \operatorname{cth} x\,\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - x^2} \quad \sim \quad y = \operatorname{ch} x\,\sqrt{1 - \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x}}\,. \tag{11}$$

- *Корень* z_n *при фиксированном* $n \in \mathbb{N}$ *попадает в область*

$$\operatorname{ch} x - 1 < y < \operatorname{ch} x, \quad 2n\pi + \frac{\pi}{3} < y < 2n\pi + \frac{\pi}{2}\,. \tag{12}$$

- *Все корни* (5) *расположены в полуплоскости*

$$\operatorname{Re} z > \ln 5\pi = 2.7541\ldots\ , \tag{13}$$

что точнее прежней оценки (7).

Перечисленные факты, связанные с формулами (9)–(13), получаются аналитическим путем. Их, в целом, достаточно для основных приложений, использующих корни уравнения (3) при $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Кроме того, имеются таблицы первых корней уравнения (1), т. е. уравнения $\sin z = z$ (см., например, [2], [8], [9]). Отсюда при замене значений $a + bi$ значениями $b + ai$ получаем первые корни уравнения (3). (Понятно, что в наши дни более естественно обратиться к системам компьютерной математики, с помощью которых находится любое разумное количество корней с высокой степенью точности.)

Как уже отмечалось, трансцендентные уравнения вида (1)–(3) встречаются в математической физике. Помимо прежних работ [8]–[11], связанных с механикой сплошной среды, укажем одну новую ситуацию, вызвавшую наш особый интерес к уравнению (3).

Некоторое время назад при изучении одной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка (см. [15], [16]) возник вопрос о нулях элементарной целой функции

$$H(\lambda) = H(\lambda; p) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + p\,\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \tag{14}$$

переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ порядка $\rho = 1/2$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Здесь, кроме общего исследования нулей, требовалось узнать, существуют ли значения $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, при которых целая функция (14) имеет кратные нули. Несмотря на внешнюю однородность конструкции по параметру p, ситуация с кратными нулями оказалась весьма неординарной.

Как выяснилось, практически всегда все нули функции (14) являются простыми, но, в то же время, существует счетное множество исключительных значений $p = p_n$, при каждом из которых функция (14) обладает еще и одним нулем кратности два. Окончательный результат формулируется в терминах корней уравнения (3), попадающих в правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Нужное подмножество корней получается из основной серии (5) в форме $z = z_n$ при $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, где $z_{-n} = \overline{z}_n$.

Теорема 3. *Рассматриваем целую функцию $H(\lambda; p)$ вида* (14) *с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Определим счетное множество значений*

$$p_n = -\frac{2}{1 + \operatorname{ch} z_n}, \qquad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad p_{-n} = \overline{p}_n, \tag{15}$$

где z_n — *корни уравнения* (3), *попадающие в полуплоскость* $\operatorname{Re} z > 0$. *Тогда справедливы утверждения.*

- *При каждом* $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *не входящем в множество* (15), *целая функция* $H(\lambda; p)$ *имеет только простые нули.*

- *При каждом* $p = p_n$ *из множества* (15) *с выбранным значением корня* z_n *целая функция* $H(\lambda; p_n)$, *помимо бесконечного числа простых нулей, имеет в точности один кратный нуль* $\lambda = z_n^2$ *кратности два.*

Добавим еще, что при $n \in \mathbb{N}$ все значения p_n из формулы (15) попадают в прямоугольник

$$-0.11 < \operatorname{Re} p < 0, \qquad 0 < \operatorname{Im} p < 0.22, \tag{16}$$

причем $p_n \to 0$ при $n \to \infty$. Границы (16) вместе с изображением последовательности p_n нетрудно получить компьютерными расчетами.

Теорема 3 полезна при построении присоединенных элементарных решений исходной обратной задачи в некоторых специальных ситуациях (см. заметку М. Алмохамеда и И. В. Тихонова в настоящем сборнике).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hardy G. H.* On the zeroes of the integral function $x - \sin x = \sum_1^\infty (-)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!}$ // The Messenger of Mathematics. 1902. Vol. 31, № 11. P. 161–165.

[2] *Hillman A. P., Salzer H. E.* Roots of $\sin z = z$ // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 7. 1943. Vol. 34, № 235. P. 575.

[3] *Robbins C. I., Smith R. C. T.* A table of roots of $\sin z = -z$ // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 7. 1948. Vol. 39, № 299. P. 1004–1005.

[4] *Burniston E. E., Siewert C. E.* Exact analytical solutions of the transcendental equation $\alpha \sin \zeta = \zeta$ // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1973. Vol. 24, № 4. P. 460–466.

[5] *Fettis H. E.* Complex roots of $\sin z = az$, $\cos z = az$, $\cosh z = az$ // Mathematics of Computation. 1976. Vol. 30, № 135. P. 541–545.

[6] *Misici L.* Numerical solutions of two transcendental equations // Mathematics of Computation. 1984. Vol. 42, № 166. P. 589–595.

[7] *Hansen E. B.* Root structure and numerical solution of the equation $\sin z = cz$ // Applied Mathematics Letters. 1997. Vol. 10, № 2. P. 33–38.

[8] *Fadle J.* Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe // Ingenieur-Archiv ($\equiv$ Archive of Applied Mechanics). 1940. Bd. 11. S. 125–149.

[9] *Buchwald V. T.* Eigenfunctions of plane elastostatics. I. The strip // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. Mathematical and Physical Sciences. 1964. Vol. 277. P. 385–400.

[10] *Joseph D. D.* The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problems. Part I // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1977. Vol. 33, № 2. P. 337–347.

[11] *Katopodes F. V., Davis A. M. J., Stone H. A.* Piston flow in a two-dimensional channel // Physics of Fluids. 2000. Vol. 12, № 5. P. 1240–1243.

[12] *Маркушевич А. И.* Целые функции. Элементарный очерк. Изд. 2-е. М. : Наука, 1975. 120 с.

[13] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. : Наука, 1966. 672 с.

[14] *Попов А. Ю., Седлецкий А. М.* Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.

[15] *Алмохамед М., Тихонов И. В.* Об обратной задаче для эволюционного уравнения второго порядка с финальным переопределением третьего рода // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2021. С. 35–37.

[16] *Алмохамед М., Тихонов И. В.* Единственность решения в модельной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы. Белгород: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2021. С. 19–21.