УДК 517.9

Об условиях моногенности[1]

Д. С. Теляковский (Россия, Москва)
dtelyakov@mail.ru

Доказана голоморфность функций одного комплексного переменного, удовлетворяющих ослабленным условиям комплексной дифференцируемости и некоторым условиям суммируемости.

Ключевые слова: голоморфность, моногенность, условия Коши–Римана, асимптотическая моногенност.

On monogeneity conditions[1]

D. S. Telýakovskij (Russia, Moscow)
dtelyakov@mail.ru

We prove that functions of one complex variable that satisfy weakened monogeneity conditions and some summability conditions are holomorphic.

Keywords: holomorphic functions, monogenic functions, Cauchy–Riemann conditions, asymptotically monogenic functions.

Получены достаточные условия голоморфности функций $f(z)$, $z \in G \subset \mathbb{C}$, которые удовлетворяют некоторым ослабленным условиям моногенности (комплексной дифференцируемости).

Согласно теореме Гурса–Принсгейма, если функция $f(z)$ в каждой точке области G имеет конечную производную, то $f(z)$ голоморфна в G. В этой теореме предположение о существовании производной можно ослаблять, но при этом на функцию обычно надо накладывать те или иные метрические условия. Доказательству голоморфности непрерывных функций, удовлетворяющих различным условиям моногенности, посвящён цикл работ Д.Е. Меньшова, выполненный в 20–30-х годах 20 века.

Сначала определим условия моногенности, которые рассматриваются в этой работе.

Пусть ζ — предельная точка множества $A_\zeta \subset G$. Будем говорить, что $f(z)$ *моногенна в* ζ *относительно множества* A_ζ, если существует конечный предел

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} \quad \text{при } z\to\zeta,\ z\in A_\zeta.$$

Наиболее известным условием моногенности вдоль множества являются условия Коши–Римана. Выполнение условий Коши–Римана в точке ζ означает моногенность $f(z)$ в точке ζ относительно крестика с центром в ζ (*крестиком* K_ζ *с центром в точке* ζ будем называть объединение двух пересекающихся в ζ неколлинеарных интервалов), причем один из интервалов крестика параллелен оси Ox, а другой — оси Oy. Д.Е. Меньшов рассмотрел также функции, моногенные в точках области относительно крестиков, без ограничений на расположение образующих крестики интервалов.

Функция $f(z)$ называется *асимптотически моногенной в точке* ζ, если $f(z)$ моногенна в ζ относительно множества A_ζ у которого точка ζ является точкой плотности (в смысле плоской меры Лебега).

Существование у $f(z)$ конечной ненулевой производной эквивалентно условиям сохранения углов и постоянства растяжений при отображении $w = f(z)$. Эти условия можно рассматривать по отдельности. Д. Е. Меньшов рассмотрел функции у которых существует конечный предел

$$\left|\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\right| \quad \text{при } z \to \zeta,\ z \in T_\zeta,$$

где T_ζ — объединение трёх попарно неколлинеарных лучей, исходящих из точки ζ. Это условие Д.Е. Меньшов назвал *условием* K''.

Д. Е. Меньшов доказал следующие достаточные условия голоморфности.

Теорема 1 [1, 2]. *Непрерывная в области G функция $f(z)$ моногенная в каждой точке $\zeta \in G$ вдоль некоторого крестика K_ζ, является в G голоморфной.*

Теорема 2 [2]. *Непрерывная в области G функция $f(z)$ асимптотически моногенная в каждой точке из G, является в G голоморфной.*

Теорема 3 [3]. *Пусть непрерывная и однолистная в области G функция $f(z)$ в каждой точке из G удовлетворяет условию K''. Тогда либо функция $f(z)$, либо функция $\overline{f(z)}$ является в G голоморфной.*

Как отметил сам Д. Е. Меньшов, пример Х. Бора функции $f(z) = z$ при $\operatorname{Im} z \geq 0$ и $f(z) = \overline{z}$ при $\operatorname{Im} z < 0$ показывает, что в последней теореме условие однолистности является существенным. Условие однолистности настолько сильно, насколько это вообще возможно, ослабил Ю. Ю. Трохимчук [4], который заменил предположение об однолистности предположением о том, что в точках ζ области отображение $w = f(z)$ является прямым, т.е. сохраняющим направления углов вдоль некоторых сходящихся к ζ последовательностей. При этом, если отображение $w = f(z)$ прямое, то функция $\overline{f(z)}$ голоморфной быть не может.

Примеры показывают, что ни в одной из теорем 1–3 полностью отказаться от условия непрерывности нельзя. Однако это условие можно существенно ослабить. Для функций, удовлетворяющих условиям Коши–Римана в классической форме (один из интервалов крестика параллелен оси Ox, а другой — оси Oy) Г. П. Толстов [5] заменил условие непрерывности функции условием её ограниченности, Г. Х. Синдаловский [6] — условием суммируемости $|f(z)|$, а Д. С. Теляковский [7] — условием суммируемости $\log^+|f(z)|$. Далее Д. С. Теляковский [8–10] показал, что во всех теоремах 1–3 условие непрерывности можно заменить некоторым условием суммируемости $\log^+|f(z)|$, причём в обобщениях теорем 1 и 3 наложенное условие суммируемости $\log^+|f(z)|$ существенно ослабить нельзя, а в теореме 3 вместо условия однолистности используется условие прямизны отображения $w = f(z)$ и на расположение лучей в тройках T_ζ необходимо наложить некоторые ограничения.

В настоящей работе ослабляется условие моногенности. Предположение о моногенности функции $f(z)$ в точках $\zeta \in G$ относительно множеств A_ζ той или иной структуры заменено предположением о выполнении следующих двух условий:

1° в каждой точке $z \in A_\zeta$, лежащей достаточно близко к точке ζ, при некотором значении L_ζ выполнено неравенство

$$\big|f(z) - f(\zeta)\big| \le L_\zeta\big|z - \zeta\big|;$$

2° если предел в условии 1° не равен нулю, то найдутся сходящиеся к ζ вдоль двух неколлинеарных лучей последовательности точек $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$, относительно которых функция $f(z)$ моногенна в ζ.

Если функция $f(z)$ удовлетворяет в точке ζ условию 1°, будем говорить, что $f(z)$ *удовлетворяет в ζ условию Липшица вдоль множества A_ζ.*

Ясно, что условие 1° выполнено, если $f(z)$ моногенна в точке ζ относительно множества A_ζ. Выполнение условия прямизны Трохимчука следует из выполнения условия 2°.

Получены следующие обобщения теорем 1–3 Меньшова.

Теорема 1′. *Пусть функция $f(z)$ в каждой точке $\zeta \in G$ удовлетворяет условию Липшица вдоль некоторого крестика K_ζ и условию 2°. Если $(\log^+|f(z)|)^p$ локально суммируем в G при всех положительных $p < 2$, то функция $f(z)$ голоморфна в G.*

Теорема 2′. *Пусть функция $f(z)$ в каждой точке $\zeta \in G$ удовлетворяет условию Липшица относительно некоторого множества A_ζ, у которого ζ является точкой плотности, и условию 2°. Если $\log^+|f(z)|$ локально суммируем в G, то функция $f(z)$ голоморфна в G.*

Для того, чтобы в теореме 3 было можно ослабить условие непрерывности, будем предполагать, что тройки лучей T_ζ являются растопыренными, т.е. с каждой стороны от любой проходящей через ζ прямой лежит по крайней мере по одному лучу из T_ζ.

Теорема 3′. *Пусть функция $f(z)$ в каждой точке $\zeta \in G$ удовлетворяет условию Липшица вдоль некоторой растопыренной тройки лучей T_ζ и условию $2°$. Если $(\log^+ |f(z)|)^p$ локально суммируем в G при всех положительных $p < 2$, то функция $f(z)$ голоморфна в G.*

Предположение о том, что функция $f(z)$ в каждой точке ζ удовлетворяет условию Липшица вдоль соответствующего множества A_ζ, существенно ослабить нельзя. Это показывает следующий пример. Пусть $h(t)$ — произвольная функция типа модуля непрерывности у которой $\dfrac{h(t)}{t} \to +\infty$ при $t \searrow 0$. Существует такая непрерывная недифференцируемая ни в одной точке функция $\varphi_h(z)$ у которой для каждой точки ζ во всех точках z выполнено неравенство $|\varphi_h(z) - \varphi_h(\zeta)| \le h(|z - \zeta|)$, и производная которой в точке ζ вдоль некоторых двух последовательностей, одна из которых стремится к ζ вдоль оси Ox, а другая — вдоль оси Oy, равна нулю.

В достаточных условий гармоничности условия на непрерывность существенно слабее. В работе Теляковского [11] была доказана гармоничность функции $u(z)$ двух переменных, удовлетворяющих уравнению Лапласа, записанному в дискретной форме. Полностью отказаться от условия непрерывности в этом утверждении нельзя, но достаточно предполагать, что для некоторой функции $h(t)$ типа модуля непрерывности для каждой точки ζ при некотором значении L_ζ во всех точках $z \in A_\zeta$ выполнено неравенство $|u(z) - u(\zeta)| \le L_\zeta h(|z - \zeta|)$.

Заметим, что в каждой из теорем $1'$–$3'$ вместо выполнения условия $2°$ достаточно предполагать, что для всех точек области вдоль соответствующих последовательностей $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$ существует конечный предел $\left|\dfrac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\right|$ и, если этот предел не равен нулю, то отображение $w = f(z)$ является прямым в смысле Трохимчука.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Menchoff D.* Sur la généralisation des conditions de Cauchy–Riemann // Fundamenta Mathematicae. 1935. Vol. 25. P. 59–97.

[2] *Меньшов Д. Е.* Об асимптотической моногенности // Матем. сб. 1936. Т. 1(43), С. 189–210.

[3] *Menchoff D.* Sur les fonctions monogénes // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1931. Vol. 59. P. 146–188.

[4] *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображени я и условия моногенности. Москва, 1963.

[5] *Tolstoff G.* Sur la fonctions bornees verifiant les conditions de Cauchy–Riemann // Матем. сб. 1942. Т. 10 (52). С. 79–86.

[6] *Синдаловский Г.Х.* Об условиях Коши–Римана в классе функций с суммируемым модулем и некоторых граничных свойствах аналитических функций //

Матем. сб. 1985. Т. 128 (170), вып. 3 (11), с. 364–382.

[7] *Теляковский Д.С.* Об одном обобщении теоремы Лумана–Меньшова // Матем. зам. 1986ю. Т. 39, вып. 4. С. 539–549.

[8] *Теляковский Д.С.* Обобщение одной теоремы Меньшова о моногенных функциях // Известия АН СССР. 1989. Т. 53, вып. 4. С. 886–896.

[9] *Теляковский Д.С.* Об асимптотически моногенных функциях // Труды МИ РАН. 1992. Т. 198, вып. 4. С. 186–193.

[10] *Теляковский Д.С.* Обобщение теоремы Меньшова о функциях, удовлетворяющих условию K'' // Матем. зам. 2004. Т. 76, вып. 4. С. 578–591.

[11] *Теляковский Д.С.* Достаточное условие гармоничности функций двух переменных, удовлетворяющих разностному уравнению Лапласа // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, вып. 4. С. 269–283.