УДК 517.521

Некоторые свойства смещённых рядов Фурье – Соболева[1]

М. С. Султанахмедов (Махачкала, Россия)
Sultanakhmedov@gmail.com

Рассматриваются ряды Фурье по системам функций, ортогональных в смысле скалярного произведения типа Соболева следующего вида

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(c)g^{(\nu)}(c) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt.$$

Доказан ряд свойств этих рядов, таких как почленное интегрирование, дифференцирование, совпадение частичных сумм с приближаемой функцией в точке c. Кроме того, исследуется их равномерная сходимость.

Ключевые слова: ортогональность в смысле Соболева, ряды Фурье, ряды Фурье – Соболева, равномерная сходимость.

Some properties of shifted Fourier – Sobolev series[1]

M. S. Sultanakhmedov (Makhachkala, Russia)
Sultanakhmedov@gmail.com

We consider Fourier series by functions orthogonal with respect to the Sobolev type inner product of the following form

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(c)g^{(\nu)}(c) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt.$$

A number of properties of these series are proved, such as term-by-term integration, differentiation, coincidence of their partial sums with the approximated function at the point c. In addition, their uniform convergence is investigated.

Keywords: orthogonality in the Sobolev sense, Fourier series, Fourier – Sobolev series, uniform convergence.

Введение

Пусть система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована на (a,b) с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\rho(x)dx = \delta_{kl}, \tag{1}$$

где δ_{kl} – символ Кронекера. Через $L^p_\rho(a,b)$ обозначим пространство функций $f(x)$, измеримых на (a,b), для которых $\int\limits_a^b |f(x)|^p\rho(x)dx < \infty$.

Из (1) следует, что $\varphi_k(x) \in L^2_\rho(a,b)$ $(k = 0,1,\ldots)$. Мы добавим к этому условию ещё одно, считая, что $\varphi_k(x) \in L(a,b)$ $(k = 0,1,\ldots)$.

Тогда для произвольно заданной точки $c \in [a,b]$ мы можем определить новую систему функций:

$$\varphi^c_{r,k}(x) = \frac{(x-c)^k}{k!}, \quad k = 0,1,\ldots,r-1, \tag{2}$$

$$\varphi^c_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_c^x (x-t)^{r-1}\varphi_k(t)dt, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$(\varphi^c_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \le \nu \le r-1,\ r \le k, \\ \varphi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r \le k, \\ \varphi^c_{r,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \le k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \le r. \end{cases} \tag{4}$$

Через $W^{r,c}_{L^p_\rho(a,b)}$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций $f(x)$, $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$, причём $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{(r)}(x) \in L^p_\rho(a,b)$. Скалярное произведение в пространстве $W^{r,c}_{L^2_\rho(a,b)}$ определим с помощью равенства

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(c)g^{(\nu)}(c) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt. \tag{5}$$

Ранее в работах Шарапудинова И.И. и др. исследователей (см., напр., [1–7] и цитированную там литературу) подробно исследовался случай, когда $c = a$. Причём исследования проводились как в общем, так и для конкретных весов $\rho(x)$ и систем функций $\{\phi(x)\}_{k=0}^\infty$.

Рассматриваемое нами скалярное произведение типа Соболева является обобщением в том смысле, что c не обязательно совпадает a. Мотивацией к такому исследованию послужила гипотеза о том, что ряды Фурье по соответствующим ортогональным функциям при определённом выборе точки c могут давать лучшее приближение к исходным функциям в смысле равномерной метрики. Гипотеза находит подтверждение в ряде компьютерных экспериментов.

Скалярное произведение вида (5), соответствующие ортогональные функции, а также ряды Фурье по ним мы будем называть *смещёнными* с тем, чтобы отличить их от рассмотренных ранее (для которых $c = a$).

Ортогональность смещённых функций и ряды Фурье – Соболева по ним

Доказано следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть функции* $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *образуют полную в* $L^2_\rho(a,b)$ *ортонормированную с весом* $\rho(x)$ *систему на отрезке* $[a,b]$. *Тогда система* $\{\varphi^c_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, *порождённая системой* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *посредством равенств* (2) *и* (3), *полна в* $W^{r,c}_{L^2_\rho(a,b)}$ *и ортонормирована относительно скалярного произведения* (5).

Для функции $f(x) \in W^{r,c}_{L^2_\rho(a,b)}$ определим смещённый ряд Фурье – Соболева с помощью равенства

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}(t)\varphi^c_{r,k}(t)\rho(t)dt, \tag{6}$$

где

$$f_{r,k}(t) = \int\limits_a^b f^{(r)}(t)\varphi_{k-r}(t)\rho(t)dt. \tag{7}$$

Отметим некоторые важные свойства ряда (6).

1. Если $r > 1$, то в результате почленного дифференцирования ряда (6) для $f(x)$, мы получим ряд для производной $f'(x)$, соответствующий случаю, когда вместо r фигурирует $r-1$. Другими словами

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f'_{r-1,k-1}\varphi^c_{r-1,k-1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(f_{r,k}\varphi^c_{r,k}(x))'. \tag{8}$$

2. Почленное интегрирование с переменным верхним пределом:

$$\int\limits_c^x f'(t)dt \sim \sum_{k=1}^{\infty} f'_{r-1,k-1}\int\limits_c^x \varphi^c_{r-1,k-1}(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} f_{r,k}\varphi^c_{r,k}(x). \tag{9}$$

3. Важное значение имеет свойство смешанного ряда (6), которое заключается в том, что его частичная сумма вида

$$\Phi^c_{r,N}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{N} f_{r,k}\varphi^c_{r,k}(x) \tag{10}$$

при $N \geq r$, r-кратно совпадает с исходной функцией $f(x)$ в точке $x = c$, т.е.

$$(\Phi_{r,N}^c(f,x))_{x=c}^{(\nu)} = f^{(\nu)}(c), \quad 0 \leq \nu \leq r-1. \tag{11}$$

4. Из (4) и (10) при $0 \leq \nu \leq r-1$ следует, что

$$\big(\Phi_{r,N}^c(f,x)\big)^{(\nu)} = \sum_{n=0}^{r-1-\nu} f^{(n+\nu)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!}+$$

$$+\sum_{n=r-\nu}^{N-\nu} f_{r-\nu,n}^{(\nu)}\varphi_{r-\nu,n}^c(x) = \Phi_{r-\nu,N-\nu}^c(f^{(\nu)},x). \tag{12}$$

В свою очередь отсюда при $0 \leq \nu \leq r-2$ выводим

$$f^{(\nu)}(x) - \big(\Phi_{r,N}^c(f,x)\big)^{(\nu)} =$$

$$= \frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_c^x (x-t)^{r-\nu-2}\left[f^{(r-1)}(t) - \Phi_{1,N-r+1}(f^{(r-1)},t)\right]dt. \tag{13}$$

Кроме того, доказано также следующее утверждение о равномерной сходимости смещённого ряда Фурье – Соболева.

Теорема 7. *Пусть* $\frac{1}{\rho(x)} \in L(a,b)$, *а функции* $\varphi_k(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$ *образуют полную в* $L_\rho^2(a,b)$ *ортонормированную с весом* $\rho(x)$ *систему на отрезке* $[a,b]$; $\{\varphi_{r,k}^c(x)\}_{k=0}^\infty$ *— система, ортонормированная в* $W_{L_\rho^2(a,b)}^r$ *относительно скалярного произведения* (5), *порождённая системой* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ *посредством равенств* (2) *и* (3). *Тогда, если* $f(x) \in W_{L_\rho^2(a,b)}^r$, *то смещённый ряд Фурье – Соболева* (6) *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно относительно* $x \in [a,b]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, вып. 1. С. 225–258.

[2] *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы функций и некоторые их приложения // Успехи математических наук. 2019. Т. 74, вып. 4(448). С. 87–164.

[3] *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы функций и задача Коши для ОДУ // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83, вып. 2. С. 204–226.

[4] *Магомед-Касумов М. Г.* Система функций, ортогональная в смысле Соболева и порожденная системой Уолша // Матем. заметки. 2019. Т. 105, вып. 4. С. 545–552.

[5] *Гаджимирзаев Р. М.* О равномерной сходимости ряда Фурье по системе полиномов, порожденной системой полиномов Лагерра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 416–423.

[6] *Sultanakhmedov M. S.* Recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials // Пробл. анал. Issues Anal. 2020. Т. 9(27), вып. 2. С. 97–118.

[7] *Sultanakhmedov M. S.* Some Properties of Sobolev Orthogonal Polynomials Associated with Chebyshev Polynomials of the Second Kind // In: Kusraev A. G., Totieva Z. D. (eds) Operator Theory and Differential Equations. Trends in Mathematics. 2021. Birkhauser, Cham. P. 259–273.