УДК 517.9

О сходимости порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для подпространств, порожденных ядром Сегё в пространстве Харди[1]

К. С. Сперанский, П. А. Терехин (Саратов, Россия)
konstantin.speransky@yahoo.com, terekhinpa@mail.ru

Мы рассматриваем представляющие свойства подпространств, порожденных ядром Сеге. Как основной результат мы доказываем критерий сходимости порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для подпространств порожденных ядром Сеге в пространстве Харди.

Ключевые слова: воспроизводящее ядро, ядро Сеге, пространство Харди, слабый жадный алгоритм.

On the convergence of the order-preserving weak greedy algorithm for subspaces generated by the Szego kernel in the Hardy space[1]

K. S. Speransky, P. A. Terekhin (Saratov, Russia)
konstantin.speransky@yahoo.com, terekhinpa@mail.ru

We consider representing properties of subspaces generated by the Szego kernel. As the main result we prove the convergence criteria of the Order-Preserving Weak Greedy Algorithm for subspaces generated by the Szego kernel in the Hardy space.

Keywords: reproducing kernel, Szego kernel, Hardy Space, weak greedy algorithm.

Построенный нами в работе [1] фрейм на основе дискретизированных ядер Сеге являлся безусловной системой представления в пространстве Харди, поэтому возникает вопрос об алгоритме нахождения коэффициентов разложения, который бы сохранил порядок элементов в естественной нумерации.

Определение 1. Пространством Харди H^2 называется пространство, состоящее из всех аналитических функций $f(z)$ в единичном диске $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Определение 2. Воспроизводящее ядро K пространства H^2 называется ядром Сеге и имеет вид

$$K(z,\zeta) = K_\zeta(z) = \frac{1}{1-\bar{\zeta} z}, \quad z, \zeta \in \mathbb{D}.$$

Для решения задачи нахождения коэффициентов системы представления широко применяются слабые жадные алгоритмы. В общем случае, слабый жадный алгоритм не дает ряда по естественно упорядоченной системе и, как правило, этот ряд не является безусловно сходящимся. Выходом из сложившейся ситуации может быть использование порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма предложенного и изученного А. В. Сильниченко в работе [2].

В качестве подпространств $L_k,\ k = 1, 2, \ldots$ по которым будет идти приближение в порядкосохраняющем слабом жадном алгоритме выберем пространства порожденные ядрами Сеге $K_{\lambda_{k,j}},\ j = 0, \ldots, n_k - 1$, которые дискретизированы в точках $\lambda_{k,j} \in \mathbb{D}$:

$$L_k := \left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1} = \operatorname{span}\left\{K_{\lambda_{k,j}}\right\}_{j=0}^{n_k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Выберем точки дискретизации ядер Сеге следующим образом

$$\lambda_{k,j} = r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_k - 1, \tag{1}$$

где мы предполагаем, что

$$r_k \nearrow 1, \qquad n_k \nearrow \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2}$$

Теорема. (см. [3]) Пусть последовательность подпространств $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ порождена ядрами Сеге дискретизированными в точках удовлетворяющих (1) и (2). Тогда порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм сходится в пространстве H^2 тогда и только тогда, когда r_k и n_k удовлетворяют предельному соотношению

$$\limsup_{k\to\infty} n_k(1 - r_k) > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Speransky K. S., Terekhin P. A.* A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space // Indag. Math. 2018. Vol. 29(5). P. 1318–1325.

[2] *Сильниченко А. В.* О сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов // Матем. заметки. 2008. Т. 84(5). С. 795–800.

[3] *Speransky K. S.* On the convergence of the order-preserving weak greedy algorithm for subspaces generated by the Szego kernel in the Hardy space // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 336–342.