УДК 517.518.87

Об аппроксимации гиперсингулярного интеграла по действительной оси[1]

Ю. С. Солиев (Москва, Россия)

su1951@mail.ru

Построены и исследованы интерполяционные квадратурные формулы с узлами различной кратности для гиперсингулярного интеграла по действительной оси для плотностей из пространства целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, целые функции экспоненциального типа, интерполяция, квадратурные формулы.

On the approximation of the hypersingular integral along the real axis[1]

Yu. S. Soliev (Moscow, Russia)

su1951@mail.ru

Interpolation quadrature formulas with nodes of various multiplicities for a hypersingular integral along the real axis for densities from the space of integer functions of exponential type are constructed and investigated.

Keywords: hypersingular integral, exponential integer functions, interpolation, quadrature formulas.

Рассмотрим понимаемый в смысле конечного значения по Адамару сингулярный интеграл

$$A_q f = A_q(f;x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^q} dt, q = 2, 3, ..., \tag{1}$$

где $f(x)$ - плотность интеграла, ограниченная на вещественной оси R функция.

Пусть $L_p(R)$ $(1 < p < \infty)$ - пространство всех измеримых на R функций f с обычной нормой, $\omega_k(f,t)_p = \omega_k(f,t)_{L_p}$ - модуль гладкости k-го порядка f в $L_p(R)$, $L_p^r(R)$ - подпространство функций $f \in L_p(R)$, для которых производная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на R и $\|f^{(r)}\|_p = \|f^{(r)}\|_{L_p} < \infty$, $B_{p,\sigma}$ - множество целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$, принадлежащих $L_p(R)$.

Для $f \in B_{p,\sigma}$ введем [1], [2] интерполяционный оператор

$$L_\sigma f = L_\sigma(f;x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\sin c\sigma(x-\frac{k\pi}{\sigma}), \sin cx = \frac{\sin x}{x}, \sigma > 0. \quad (2)$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) выражением (2), получим квадратурную формулу

$$A_q f = A_q(L_\sigma f; x) + R_{\sigma q} f, \quad (3)$$

где $R_{\sigma q} f = R_{\sigma q}(f;x)$ - остаточный член. Приведем явный вид формулы (3) при $q = 2$:

$$A_2 f = A_2(L_\sigma f; x) + R_{\sigma 2} f =$$
$$= \frac{\sigma}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\left(\sin c^2\frac{\sigma x - k\pi}{2} - 2\sin c(\sigma x - k\pi)\right) + R_{\sigma 2} f. \quad (4)$$

Теорема 1. *Пусть $f \in L_p^r(R) \cap B_{p,\sigma}$, $r = 1, 2, ...$, $1 \le p \le \infty$, $\sigma \ge 1$. Если $f(x) = O\left((|\, x\,| + 1)^{-d}\right)$, $dp \ge 1$, $x \in R$, то для остаточного члена квадратурной формулы (3) справедлива оценка*

$$\|R_{\sigma q} f\|_p \le C_{r,p,q}\sigma^{-r+q}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{1}{\sigma}\right)_p,$$

где $C_{r,p,q}$ - постоянная, зависящая только от r, p и q.

Из теоремы 1 и известных результатов по неравенствам разных метрик (см., напр., [3]) вытекает

Следствие. Пусть в условиях теоремы 1 $\omega_1(f,\delta)_p = 0(\delta^\alpha)$, $0 \le \alpha \le 1$. Тогда для $R_{\sigma q} f$ справедлива равномерная оценка

$$\|R_{\sigma q} f\|_C = O\left(\sigma^{-r-\alpha+q+\frac{1}{p}}\right), r + \alpha \ge q + \frac{1}{p}.$$

Заметим, что если $f \in B_{p,\sigma}$ и 2π - периодична, то квадратурная формула (4) точна для любого тригонометрического полинома вида $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, $n \le [\sigma]$ ($[\sigma]$ - целая часть σ) (см. [4]). Далее, для целых функций экспоненциального типа , по теореме М. Картрайт [3], условие ограниченности $f(x)$ на R можно заменить на условие $|f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)| \le M$ ($M \ge 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$) .

Рассмотрим квадратурную формулу с кратными узлами для интеграла (1).

По аналогии с [5] для $f \in B_{p,\sigma}$ введем интерполяционный оператор $H_\sigma f = H_\sigma(f;x)$, удовлетворяющий условиям $H_\sigma^{(v)}\left(f;\frac{k\pi}{\sigma}\right) = f^{(v)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)$ $(v = \overline{0,m-1})$:

$$H_\sigma f = H_\sigma\left(f;x\right) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sin c^m \sigma \left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right) \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{v!}\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)^v f^{(v)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right).$$

Тогда

$$A_q f = A_q\left(H_\sigma f;x\right) + R_{\sigma m}^{(q)} f, \tag{5}$$

где $R_{\sigma m}^{(q)} f = R_{\sigma m}^{(q)}(f;x)$ - остаточный член.

При $q=2$ квадратурная формула (5) примет вид:

$$A_2 f = A_2\left(H_\sigma f;x\right) + R_{\sigma m}^{(2)} f =$$

$$= \frac{1}{2^{2n-1}\sigma^{2n}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=0}^{2n-1} \frac{1}{v!} f^{(v)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-s+1} C_{2n}^s \left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)^{-2n+v-1}$$

$$(\sum_{\mu=1}^{2n-v} \frac{1}{(\mu-1)!}(2n-v-\mu+1)\left(2\sigma(n-s)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right)^{\mu-1}\cos\frac{\mu\pi}{2} +$$

$$+2\sigma(n-s)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\cos 2\sigma(n-s)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right) - (2n-v)\sin 2\sigma(n-s)$$

$$\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)) + R_{\sigma m}^{(2)} f, m = 2n;$$

$$A_2 f = A_2\left(H_\sigma f;x\right) + R_{\sigma m}^{(2)} f =$$

$$\frac{1}{2^{2n-2}\sigma^{2n-1}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=0}^{2n-2} \frac{1}{v!} f^{(v)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-s+1} C_{2n-1}^s \left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)^{-2n+v}$$

$$(\sum_{\mu=1}^{2n-v-1} \frac{1}{(\mu-1)!}(2n-v-\mu)\left(\sigma(2n-2s-1)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right)^{\mu-1}\sin\frac{\mu\pi}{2} -$$

$$-\sigma(2n-2s-1)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\sin\sigma(2n-2s-1)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right) -$$

$$(2n-v-1)\cos\sigma(2n-2s-1)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)) + R_{\sigma m}^{(2)} f, m = 2n-1;$$

где C_n^k - биноминальные коэффициенты.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_p^r(R) \cap B_{p,\sigma}$, $r = 1, 2, ...$, $1 \le p \le \infty$, $\sigma \ge 1$, $\omega_k(f, \delta)_p = 0(\delta^\alpha)$, $0 \le \alpha \le 1$ *и* $f^{(\nu)}(x) = O\left((| x | + 1)^{-d_\nu}\right)$, $d_\nu p \ge 1$, $\nu = \overline{0, m-1}$, $x \in R$. *Тогда*

$$\|R_{\sigma m}^{(q)} f\|_p = O\left(\sigma^{-r-\alpha+q+m-1}\right), r + \alpha \geqq +m - 1.$$

Следствие. В условиях теоремы 2 для $R_{\sigma q}^{(q)} f$ справедлива равномерная оценка

$$\|R_{\sigma q}^{(q)} f\|_C = O\left(\sigma^{-r-\alpha+q+m-1+\frac{1}{p}}\right), r + \alpha \geqq +\frac{1}{p} + m - 1.$$

В заключение отметим, что аналогичные вопросы для интеграла $A_1 f$ рассматривались в работе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Rahman Q. I., Vertesi P.* On the L^p convergence of Lagrange interpolating entire functions of exponential type // J. Approx. Theory. 1992. Vol. 69. P. 302–317.

[2] *Gensun F.* Whittaker-Kotelnikov-Shannon sampling theorem and aliasing error // J. Approx. Theory. 1996. Vol. 85. P. 115–131.

[3] *Ибрагимов И. И.* Теория приближения целыми функциями. Баку : Элм, 1979. 468 с.

[4] *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. Москва : Наука, 1965. 408 с.

[5] *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. Москва : ГИФМЛ, 1962. 220 с.

[6] *Солиев Ю. С.* Об аппроксимации преобразования Гильберта
Материалы Международной конф. Воронежская зимняя матем. школа С.Г.Крейна - 2022. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022.