УДК 517.17+517.51

О кратном интеграле периодической функции нескольких переменных[1]

Г. К. Соколова, С. С. Орлов (Иркутск, Россия)
98gal@mail.ru, orlov_sergey@inbox.ru

Заметка посвящена исследованию свойства периодичности функций нескольких действительных переменных. Доказывается теорема о представлении кратного интеграла с переменными верхними пределами периодической функции многих действительных переменных, что является обобщением леммы о представлении интеграла периодической функции одной переменной в виде суммы линейной и периодической функций. Без ограничения общности, рассматриваются функции, имеющие в качестве множества периодов прямоугольную решётку.

Ключевые слова: периодическая функция многих действительных переменных, множество периодов, кратный интеграл.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Иркутской области и РФФИ (проект № 20-41-385002 р_Наставник).

On the multiple integral of a periodic multivariate function[1]

G. K. Sokolova, S. S. Orlov (Irkutsk, Russia)
98gal@mail.ru, orlov_sergey@inbox.ru

This note deals with the study of the periodicity property of a multivariate functions. Theorem on the representation of a multiple integral with variable upper boundaries of a periodic multivariate function is proved. This theorem is a generalization to the multidimensional case of the Lemma on the representation of the integral of a periodic function of one variable as a sum of linear and periodic functions. Without loss of generality, we consider functions with a rectangular lattice as the set of periods.

Keywords: periodic functions of several variables, set of periods, multiple integral.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Goverment of the Irkutsk Region (project No. 20-41-385002).

Ранее в заметке [1] была описана структура множества P_f периодов периодической функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, и показано, что, не ограничивая общности, всякую периодическую функцию $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ можно считать периодической по первым m_1 переменным и постоянной по следующим m_2 переменным. Всюду далее будем полагать, что функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является периодической по всем переменным с множеством периодов P_f решёткой $\Lambda(\bar{T}_1,\bar{T}_2,\ldots,\bar{T}_n)$, порождённой векторами $\bar{T}_i=T_i\bar{\mathrm{e}}_i$, система векторов $\{\bar{\mathrm{e}}\}_{i=1}^n$ означает классический базис Галеля, и $i=1,2,\ldots,n$.

Следующая теорема является обобщением леммы о представлении интеграла периодической функции одной переменной [2, стр. 57].

Теорема. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна по совокупности всех переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и является периодической с множеством периодов P_f, тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{P_{J_n}} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{i \in J_n \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}} x_i \int\limits_{P_{i_1, \ldots, i_k}} S_{J_n \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}}\, dt_{i_1} dt_{i_2} \ldots dt_{i_k} +$$

$$+ (-1)^{n-1} \prod_{i \in J_n} x_i \;\; S_{J_n} + \varepsilon(\bar{r}), \;\; \bar{r} \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $P_{i_1, \ldots, i_k} = [0, x_{i_1}] \times \ldots \times [0, x_{i_k}]$ обозначает k-мерный параллелепипед, $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество индексов, а выражение

$$S_{i_1, \ldots, i_k} = \frac{1}{\mu(P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1}, \ldots, \bar{T}_{i_k})})} \int\limits_{P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1}, \ldots, \bar{T}_{i_k})}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_k}$$

определяет среднее значение функции f по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ на фундаментальном параллелепипеде $P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1}, \ldots, \bar{T}_{i_k})}$ решётки $\Lambda(\bar{T}_{i_1}, \ldots, \bar{T}_{i_k})$ меры Жордана $\mu(P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1}, \ldots, \bar{T}_{i_k})})$, функция $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ периодическая с множеством периодов P_ε таким, что $\mathrm{P}_f \subseteq \mathrm{P}_\varepsilon$.

При $n = 1$ приведённая выше теорема играет сущестенную роль при построении периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений [2], а также интегральных уравнений, например, [3]. Несмотря на громоздкий вид, формула (1) имеет простую структуру и напоминает формулу включения-исключения из теории множеств.

Доказательство заключается в проверке периодичности функции $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с периодами $\bar{T}_i = T_i \bar{\mathrm{e}}_i$, где, здесь и всюду далее, $i \in J_n$. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ периодическая с множеством периодов P_f, и $j \in J_n$. Тогда имеет место соотношение

$$\varepsilon(\bar{r} + \bar{T}_j) - \varepsilon(\bar{r}) = \int\limits_{P_{J_n \setminus \{j\}}} \int\limits_0^{T_j} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n \\ i_\ell \neq j, \; \ell \in J_n}} \prod_{i \in J_n \setminus \{i_1, \ldots, i_k, j\}} x_i \int\limits_0^{T_j} \int\limits_{P_{i_1, \ldots, i_k}} S_{J_n \setminus \{i_1, \ldots, i_k, j\}}\, dt_{i_1} \ldots dt_{i_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n\\ i_\ell\neq j,\ \ell\in J_n}} \prod_{i\in J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k,j\}} x_i \int\limits_0^{T_j} \int\limits_{P_{i_1,\ldots,i_k}} S_{J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k,j\}}\, dt_{i_1}\ldots dt_{i_k} -$$

$$-\int\limits_0^{T_j}\int\limits_{P_{J_n}\setminus\{j\}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n-(-1)^{n-2}\prod_{i\in J_n\setminus\{j\}} x_i \int\limits_0^{T_j} S_{J_n\setminus\{j\}}\,dt_j-$$

$$-(-1)^{n-1}\prod_{i\in J_n\setminus\{j\}} x_i \int\limits_0^{T_j} S_{J_n\setminus\{j\}} dt_j=0,$$

правая часть которого обращается в нуль, в силу выполнения равенства

$$\int\limits_{P_{J_n\setminus\{j\}}}\int\limits_{x_j}^{x_j+T_j} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n=\int\limits_{P_{J_n\setminus\{j\}}}\int\limits_0^{T_j} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n,$$

левая часть которого не зависит от переменной интегрирования x_j, что следует из периодичности с периодом T_j функции f по этой переменной и соотношения

$$\partial_{x_1x_2\ldots x_n}\int\limits_{P_{J_n\setminus\{j\}}}\int\limits_{x_j}^{x_j+T_j} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n=f(\bar r+\bar T_j)-f(\bar r),$$

которое в силу непрерывности функции f по совокупности переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ является верным. Таким образом, периоды $\bar T_i=T_i\bar{\mathrm e}_i$, $i\in J_n$, порождающие множество периодов $\mathrm P_f$ функции f являются периодами и функции ε, т. е. имеет место включение $\mathrm P_f\subseteq \mathrm P_\varepsilon$.

Отметим, что *представление* (1) *инвариантно относительно выбора периодов по переменным* x_i, $i\in J_n$ *функции* $f:\mathbb R^n\to\mathbb R$. Поскольку функция $f:\mathbb R^n\to\mathbb R$ непрерывна на $\mathbb R^n$ по совокупности переменных, то функция $\varepsilon:\mathbb R^n\to\mathbb R$ имеет непрерывную всюду на $\mathbb R^n$ смешанную производную $\partial_{x_1\ldots x_n}\varepsilon$ и является решением следующей задачи типа Гурса

$$\partial_{x_1\ldots x_n}\varepsilon=f(\bar r)-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} S_{J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}}-(-1)^{n-1}S_{J_n},$$

$$\varepsilon|_{x_j=0}=\varepsilon|_{x_i=0}=0,\ \ i,j\in J_n,$$

которая является однозначно разрешимой [4, с. 298]. Отсюда немедленно следует, что *представление* (1) *единственно*. Если функция $f:\mathbb R^n\to\mathbb R$

тождественно постоянна или представима как сумма функций, которые зависят от каждой переменной с отдельности, т. е.

$$f(\bar{r}) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n),$$

тогда уравнение задачи типа Гурса окажется однородным $\partial_{x_1 \ldots x_n} \varepsilon = 0$, и рассматриваемая задача будет иметь тождественно нулевое решение. Иными словами, в этом случае, множество периодов функции $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$.

Следующее утверждение является прямым следствием приведённой выше теоремы. Введём обозначение

$$F(\bar{r}) = \int\limits_{P_{J_n}} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n, \ \ \bar{r} \in \mathbb{R}^n,$$

где P_{J_n} — n-мерный параллелепипед из теоремы 1.

Следствие. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является непрерывной функцией по совокупности переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *и периодической с решёткой периодов* P_f. *Тогда для того чтобы кратный интеграл* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *был периодической функцией по всем переменным* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $i \in J_n$ *выполнялось соотношение*

$$\int\limits_0^{T_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, \ldots, x_n)\, dt = 0,$$

при всех $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. *При этом* $\mathrm{P}_F = \mathrm{P}_f$.

Приведённые результаты планируется применить к изучению вопроса существования периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе, и к построению множеств периодов найденных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Соколова Г. К.* О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения — 2018: Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань : Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. Т. 56. С. 273–277.

[2] *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979. 744 с.

[3] *Малютина М. В., Орлов С. С.* Периодическое решение обобщенного интегрального уравнения Абеля первого рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 4 (44). С. 58–69.

[4] *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.