УДК 517.5

Свойства частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье[1]

Б. В. Симонов, И. Э. Симонова, Л. В. Самофалова, В. П. Мишта (Волгоград, Россия)
dvr@vstu.ru

В данной работе уточняются некоторые свойства частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье в пространствах Лебега со смешанной нормой.

Ключевые слова: частный модуль гладкости, лакунарные коэффициенты Фурье, смешанная норма.

Properties of partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients[1]

B. V. Simonov, I. E. Simonova, L. V. Samofalova, V. P. Mishta (Volgograd, Russia)
dvr@vstu.ru

In this paper certain properties for the partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients in the Lebesgue space with the mixed norm are refined.

Keywords: partial modulus of smoothness, lacunary Fourier coefficients, mixed norm.

Для функций одного переменного В.И. Коляда [1] доказал неравенство, уточняющее известное неравенство П.Л. Ульянова [2, 3]. В данной работе получено аналогичное неравенство для частных модулей гладкости для функций с лакунарными коэффициентами Фурье в пространствах Лебега со смешанной нормой. Свойства частных модулей гладкости изучались в ряде работ (см., например, [4] - [7]).

Обозначим через

– $L_{p_1p_2}, 1 < p_i < \infty, i = 1,2$ – множество измеримых функций двух переменных $f(x_1,x_2), 2\pi$ - периодических по каждому переменному, для которых

$$||f||_{p_1p_2} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} < \infty;$$

– $L^0_{p_1p_2}$ — множество функций $f \in L_{p_1p_2}$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$; для почти всех x_1 и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0$; для почти всех x_2;

– $S_{m_1,\infty}(f), S_{\infty,m_2}(f), S_{m_1,m_2}(f)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f(x_1,x_2)$, т.е.
$S_{m_1,\infty}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2)D_{m_1}(t_1)dt_1$, $S_{\infty,m_2}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2+t_2)\times$ $\times D_{m_2}(t_2)dt_2$, $S_{m_1,m_2}(f) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2+t_2)D_{m_1}(t_1)D_{m_2}(t_2)dt_1dt_2$ $(m_i = 0,1,2,...,\ i=1,2)$, где $D_m(t) = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$ $(m = 0,1,2...)$ – ядро Дирихле;

– $f^{(\rho_1,\rho_2)}$ — производную в смысле Вейля функции $f(x_1,x_2)$ порядка $\rho_1(\rho_1 \geq 0)$ по переменной x_1 и порядка $\rho_2(\rho_2 \geq 0)$ по переменной x_2 ([8], гл. III, стр. 238),

– $E_{m_1\infty}(f)_{p_1p_2}$ — частное наилучшее приближение функции $f \in L_{p_1p_2}$ по переменной x_1, т. е. $E_{m_1\infty}(f)_{p_1p_2} = \inf\limits_{T_{m_1\infty}} \|f - T_{m_1\infty}\|_{p_1p_2}$, где функции $T_{m_1\infty}(x_1,x_2) \in L_{p_1p_2}$ и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше, чем m_1, по переменной x_1;

– $E_{\infty m_2}(f)_{p_1p_2}$ — частное наилучшее приближение функции $f \in L_{p_1p_2}$ по переменной x_2,, т. е. $E_{\infty m_2}(f)_{p_1p_2} = \inf\limits_{T_{\infty m_2}} \|f - T_{\infty m_2}\|_{p_1p_2}$, где функции $T_{\infty m_2}(x_1,x_2) \in L_{p_1p_2}$ и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше, чем m_2, по переменной x_2.

Для функции $f \in L_{p_1p_2}$ определим разности с шагами h_1 и h_2 положительных порядков α_1 и α_2 соответственно, по переменным x_1 и x_2, следующим образом:
$\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f) = \sum\limits_{\nu_1=0}^{\infty}(-1)^{\nu_1}\binom{\alpha_1}{\nu_1} f(x_1 + (\alpha_1 - \nu_1)h_1, x_2)$, $\Delta^{\alpha_2}_{h_2}(f) = \sum\limits_{\nu_2=0}^{\infty}(-1)^{\nu_2}\binom{\alpha_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + (\alpha_2 - \nu_2)h_2)$, где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = \alpha$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geq 2$.

Обозначим через

– $\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}$– частный модуль гладкости положительного порядка α_1 по переменной x_1, то есть

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} = \sup_{|h_1|\leq\delta_1} \|\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f)\|_{p_1p_2},$$

– $\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}$– частный модуль гладкости положительного порядка α_2 по переменной x_2, то есть

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}=\sup_{|h_2|\le\delta_2}\|\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)\|_{p_1p_2}.$$

Для неотрицательных функционалов $F(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2)$ будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2)\ll G(f,\delta_1,\delta_2)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f,δ_1 и δ_2, такая, что $F(f,\delta_1,\delta_2)\le CG(f,\delta_1,\delta_2)$. Если одновременно $F(f,\delta_1,\delta_2)\ll G(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2)\ll F(f,\delta_1,\delta_2)$, то будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2)\asymp G(f,\delta_1,\delta_2)$.

Скажем, что $f\in\Lambda_{p_1p_2},\ 1<p_i<\infty,\ i=1,2$, если $f\in L^0_{p_1p_2}$ и имеет ряд Фурье

$$\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=0}^{\infty}a_{\mu_1,\mu_2}\varphi_1(2^{\mu_1}x_1)\varphi_2(2^{\mu_2}x_2),$$

где $\varphi_i(t)=\cos t$ или $\varphi_i(t)=\sin t,\ i=1,2.$

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $f\in\Lambda_{p_1p_2},1<p_i<\infty,\beta_i>\alpha_i>0,n_i=0,1,2\cdots,\delta_i\in(0,\frac12),i=1,2.$ *Тогда*

$$\omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{2^{n_1}}\Big)_{p_1p_2}\asymp\frac{1}{2^{n_1\alpha_1}}\Bigg\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{\infty}a_{k_1k_2}^2 2^{2k_1\alpha_1}\Bigg\}^{\frac12}+\Bigg\{\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}a_{k_1k_2}^2\Bigg\}^{\frac12},$$

$$\omega_{0,\alpha_2}\Big(f,\frac{1}{2^{n_2}}\Big)_{p_1p_2}\asymp\frac{1}{2^{n_2\alpha_2}}\Bigg\{\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{n_2}a_{k_1k_2}^2 2^{2k_2\alpha_2}\Bigg\}^{\frac12}+\Bigg\{\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=n_2+1}^{\infty}a_{k_1k_2}^2\Bigg\}^{\frac12},$$

$$\omega_{\alpha_1,0}\left(f,\frac{1}{2^{n_1}}\right)_{p_1p_2}\asymp\frac{1}{2^{\alpha_1n_1}}\left(\sum_{\mu_1=0}^{n_1}2^{2\alpha_1\mu_1}E^2_{2^{\mu_1}-1\infty}(f)_{p_1p_2}\right)^{\frac12},$$

$$\omega_{0,\alpha_2}\left(f,\frac{1}{2^{n_2}}\right)_{p_1p_2}\asymp\frac{1}{2^{\alpha_2n_2}}\left(\sum_{\mu_1=0}^{n_2}2^{2\alpha_2\mu_2}E^2_{\infty,2^{\mu_2}-1}(f)_{p_1p_2}\right)^{\frac12},$$

$$\omega_{\alpha_1,0}\left(f,\frac{1}{2^{n_1}}\right)_{p_1p_2}\asymp\left(\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty}2^{-2\alpha_1\mu_1}\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{\mu_1}\infty}(f)\|^2_{p_1p_2}\right)^{\frac12},$$

$$\omega_{0,\alpha_2}\left(f,\frac{1}{2^{n_2}}\right)_{p_1p_2}\asymp\left(\sum_{\mu_2=n_2+1}^{\infty}2^{-2\alpha_2\mu_2}\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty2^{\mu_2}}(f)\|^2_{p_1p_2}\right)^{\frac12},$$

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} \asymp \delta_1^{\alpha_1}\left(\int\limits_{\delta_1}^{1}\left[t_1^{-\alpha_1}\omega_{\beta_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}\right]^2\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2} \asymp \delta_2^{\alpha_2}\left(\int\limits_{\delta_2}^{1}\left[t_2^{-\alpha_2}\omega_{0,\beta_2}(f,t_2)_{p_1p_2}\right]^2\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in \Lambda_{p_1p_2}, \alpha_i > \theta_i, \delta_i \in (0,1), i = 1,2.$ *Тогда*

I. при $1 < p_1 < q_1 < \infty, \theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, 1 < p_2 < \infty$

$$\delta_1^{\alpha_1-\theta_1}\left(\int\limits_{\delta_1}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)}\omega_{\alpha_1,0}^{p_1}(f,t_1)_{q_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \ll \left(\int\limits_{0}^{\delta_1} t_1^{-q_1\theta_1}\omega_{\alpha_1,0}^{q_1}(f,t_1)_{p_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}, \tag{1}$$

II. при $1 < p_2 < q_2 < \infty, \theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}, 1 < p_1 < \infty$

$$\delta_2^{\alpha_2-\theta_2}\left(\int\limits_{\delta_2}^{1} t_2^{-p_2(\alpha_2-\theta_2)}\omega_{0,\alpha_2}^{p_2}(f,t_2)_{p_1q_2}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \ll \left(\int\limits_{0}^{\delta_2} t_2^{-q_2\theta_2}\omega_{0,\alpha_2}^{q_2}(f,t_2)_{p_1p_2}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}. \tag{2}$$

Причем в соотношениях (1) и (2) знак $\ll$ *нельзя заменить на* $\asymp$.

Теорема 3.

I. Пусть $f \in \Lambda_{p_1p_2}, 1 < p_1 < q_1 < \infty, \theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, 1 < p_2 < \infty, \alpha_1 > \theta_1, n_1 = 1, 2, \ldots.$ *Тогда*

$$\left(\int\limits_{0}^{2^{-n_1}} t_1^{-q_1\theta_1}\omega_{\alpha_1,0}^{q_1}(f,t_1)_{p_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \asymp$$

$$\asymp 2^{n_1(\theta_1-\alpha_1)}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=0}^{n_1} a_{\mu_1,\mu_2}^2 2^{2\mu_1\alpha_1}\Big)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1q_1\theta_1}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a_{\nu_1,\mu_2}^2\Big)^{\frac{q_1}{2}}\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

$$2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\left(\int\limits_{2^{-n_1}}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)}\omega_{\alpha_1,0}^{p_1}(f,t_1)_{q_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1p_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a_{\nu_1,\mu_2}^2\Big)^{\frac{p_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{p_1}} + \Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2}^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

II. Пусть $f \in \Lambda_{p_1p_2}, 1 < p_2 < q_2 < \infty, \theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}, 1 < p_1 < \infty, \alpha_2 > \theta_2, n_2 = 1, 2, ...$ *Тогда*

$$\left(\int\limits_0^{2^{-n_2}} t_2^{-q_2\theta_2} \omega_{0,\alpha_2}^{q_2}(f, t_2)_{p_1p_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \asymp$$

$$\asymp 2^{n_2(\theta_2-\alpha_2)} \Big(\sum_{\mu_2=0}^{n_2} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2}^2 2^{2\mu_2\alpha_2} \Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q_2 \theta_2} \Big(\sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\nu_2}^2 \Big)^{\frac{q_2}{2}} \Big)^{\frac{1}{q_2}},$$

$$2^{-n_2(\alpha_2-\theta_2)} \left(\int\limits_{2^{-n_2}}^{1} t_2^{-p_2(\alpha_2-\theta_2)} \omega_{0,\alpha_2}^{p_2}(f, t_2)_{p_1q_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n_2(\alpha_2-\theta_2)} \Big(\sum_{\nu_2=0}^{n_2} 2^{\nu_2 p_2(\alpha_2-\theta_2)} \Big(\sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\nu_2}^2 \Big)^{\frac{p_2}{2}} \Big)^{\frac{1}{p_2}} + \Big(\sum_{\mu_1=0}^{\infty} \sum_{\mu_2=n_2+1}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогичные теоремы для функции одного переменного доказаны в работе [9], для смешанных модулей гладкости – в работах [10], [11].

Замечание. Из теоремы 2 следует следующая оценка частных модулей гладкости производной функции через частные модули гладкости самой функции.

Пусть $f \in \Lambda_{p_1p_2}, \alpha_i > \theta_i, \delta_i \in (0,1), i = 1, 2.$ *Тогда*

I. при $1 < p_1 < q_1 < \infty, \theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, 1 < p_2 < \infty, \rho_1 > 0$

$$\delta_1^{\alpha_1-\theta_1} \left(\int\limits_{\delta_1}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)} \omega_{\alpha_1,0}^{p_1}(f^{(\rho_1,0)}, t_1)_{q_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \ll$$

$$\ll \left(\int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-q_1(\rho_1+\theta_1)} \omega_{\alpha_1+\rho_1,0}^{q_1}(f, t_1)_{p_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

II. при $1 < p_2 < q_2 < \infty, \theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}, 1 < p_1 < \infty, \rho_2 > 0$

$$\delta_2^{\alpha_2-\theta_2} \left(\int\limits_{\delta_2}^{1} t_2^{-p_2(\alpha_2-\theta_2)} \omega_{0,\alpha_2}^{p_2}(f^{(0,\rho_2)}, t_2)_{p_1q_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \ll$$

$$\ll \left(\int\limits_0^{\delta_2} t_2^{-q_2(\theta_2+\rho_2)} \omega_{0,\alpha_2+\rho_2}^{q_2}(f, t_2)_{p_1p_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Коляда В. И.* О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1988. Т. 181. С. 117–136.

[2] *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.

[3] *Ульянов П. Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. 1970. Т. 81(123), № 1. С. 104–131.

[4] *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Дробные модули гладкости. М : МАКС Пресс, 2016. 338 с.

[5] *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Свойства частного модуля гладкости положительного порядка в смешанной метрике // Современные проблемы математики и механики: Труды мех-мат. ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова. Т. X. Математика, Вып. 1. К 60-летию семинара "Тригонометрические и ортогональные ряды". М. : Изд-во Попечительского совета при мех.-мат. ф-те МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014. С. 58–71.

[6] *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Усиленные неравенства Ульянова для частных модулей гладкости функций из пространств с различными смешанными метриками // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 3. С. 26–39.

[7] *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Оценки частных модулей гладкости в метриках $L_{p_1,\infty}$ и L_{∞,p_2} через частные модули гладкости в метриках L_{p_1,p_2} // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020. № 1. С. 3–17.

[8] *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М : Наука, 1975. 480 с.

[9] *Potapov M. K., Simonov B. V., Tikhonov S. J.* Relations for moduli of smoothness in various metrics: functions with restrictions on the Fourier coefficients // Jaen J. Approx. 2009. Vol. 1(2). P. 205–222.

[10] *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Уточнение неравенства Ульянова для смешанных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. № 1. С. 18–24.

[11] *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Свойства смешанных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2014. № 1. С. 6–17.