УДК 517.9

Оценка наименьшего уклонения для периодических функций в метрике Хаусдорфа[1]

Е. Х. Садекова (Москва, Россия)

EKSadekova@mephi.ru

На вещественной оси рассматривается класс многозначных 2π–периодических ограниченных функций. Исследуется задача о приближении в хаусдорфовой метрике функций из этого класса тригонометрическими полиномами. Получена оценка сверху для величины наименьшего уклонения в терминах колебания функции. Основной результат работы проиллюстрирован на двух модельных примерах — функциях точечного всплеска и точечного колебания.

Ключевые слова: периодическая функция, метрика Хаусдорфа, тригонометрические полиномы, наименьшее уклонение, точечный всплеск, точечное колебание.

The estimation of the least deviation for periodic functions in the Hausdorff metric[1]

E. H. Sadekova (Moscow, Russia)

EKSadekova@mephi.ru

The class of multivalued 2π–periodic bounded functions is considered on the real axis. The problem of approximation in the Hausdorff metric of functions from this class by trigonometric polynomials is investigated. An upper bound is obtained for the value of the least deviation in terms of the fluctuation of the function. The main result of the paper is illustrated by two model examples — the functions of a point splash and a point oscillation.

Keywords: periodic function, Hausdorff metric, trigonometric polynomials, least deviation, point splash function, point oscillation function.

Рассмотрим метрическое пространство точек на плоскости с *расстоянием Минковского*

$$\rho\left((x_1,\, y_1), (x_2,\, y_2)\right) = \max\left\{|x_1 - x_2|,\, |y_1 - y_2|\right\}.$$

Пусть A и B — замкнутые множества на плоскости. *Хаусдорфовым расстоянием* между множествами A и B называется величина

$$H(A, B) = \inf\left\{\varepsilon \geqslant 0 :\ A \subset U_\varepsilon(B),\, B \subset U_\varepsilon(A)\right\},$$

где $U_\varepsilon(X) = \left\{(x, y) :\ \rho\left((x, y)\,,\, X\right) \leqslant \varepsilon\right\}$ — «ε-окрестность» множества X на плоскости относительно расстояния ρ.

Пусть $\mathcal{M}$ — класс 2π–периодических ограниченных (вообще говоря, многозначных) функций. Хаусдорфовым расстоянием $H(f,\, g)$ между двумя ограниченными функциями $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathcal{M}$ называется хаусдорфово расстояние между их дополненными графиками, т. е.

$$H(f,\, g) = H\left(F(f),\, F(g)\right),$$

где $F(f)$ — дополненный график функции $y = f(x)$. Под *дополненным графиком* $F(f)$ такой функции f будем понимать наименьшее замкнутое множество плоскости, содержащее график этой функции и вместе с каждой парой точек $(x_1,\, y_1)$ и $(x_1,\, y_2)$ содержащее вертикальный отрезок с концами в этих точках.

Для ограниченной 2π–периодической функции наименьшее уклонение от тригонометрических полиномов T_n порядка не выше n в смысле хаусдорфова расстояния обозначим символом

$$HE_n^T(f) = \inf_{T_n} \left\{H(f,\, T_n)\right\}.$$

Пусть $\Omega(f)$ — колебание функции f из $\mathcal{M}$, т. е. величина

$$\Omega(f) = \sup_{x\in[0,2\pi]} f(x) - \inf_{x\in[0,2\pi]} f(x).$$

Наш первый результат состоит в следующем.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in \mathcal{M}$, δ–окрестность дополненного графика которой содержит график некоторого тригонометрического полинома, при всех $n > n_0(f)$ справедлива оценка*

$$HE_n^T(f) \,<\, \frac{1}{n}\,\log\Big(e^4\, n\, \Omega(f)\Big).$$

В работе [1] Бл. Х. Сендов и В. А. Попов установили, что для любой функции $f \in \mathcal{M}$ выполняется неравенство

$$HE_n(f) \leqslant \Big(1 + \alpha_n(f)\Big)\,\frac{\log n}{n},$$

где $\alpha_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$, причём множитель $1 + \alpha_n(f)$ нельзя заменить на множитель $C + \alpha_n(f)$ с константой $C < 1$.

Для $M > 0$ определим *функцию точечного всплеска*

$$\delta_M(x) = \begin{cases} [0, M], & x \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Как показано в [2], при достаточно больших n для наименьших уклонений $HE_n(\delta_M)$ верна оценка

$$HE_n(\delta_M) > \,\frac{1}{n}\,\Big(\log\left(2Mn\right) - \log\log n\Big),$$

которая демонстрирует точность теоремы 1.

Рассмотрим теперь *функцию точечного колебания*, определяемую по формуле

$$\chi_M(x) = \begin{cases} [-M, M], & x \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Для этого специального примера получено следующее утверждение.

Теорема 2. *При каждом значении $M > 0$ справедлива асимптотическая формула*

$$HE_n(\chi_M) = \frac{1}{n}\left(\log\left(4M\sqrt{e}\,n\right) - \frac{1}{2}\log\log n\right) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Сендов Бл., Попов В. А.* Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими многочленами в метрике Хаусдорфа // Матем. сб. 1972. Т. 89, № 1. С. 138–147.

[2] *Долженко Е. П., Севастьянов Е. А.* Аппроксимация со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям) // Изв. РАН. Серия матем. 1999. Т. 63, № 3. С. 77–118.