УДК 517.958

Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной[1]

В. С. Рыхлов (Саратов, Россия)

rykhlovvs@yamdex.ru

Рассматривается начально-граничная задача для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка на конечном отрезке с постоянными коэффициентами и смешанной производной. Рассматривается случай закрепленных концов. Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат. Определяются классическая и обобщенная постановки начально-граничных задач. Формулируются теоремы единственности решения и существовании решений для двух частных случаев. Даются формулы для решений в этих частных случаях.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, второй порядок, начально-граничная задача, обобщенная начально-граничная задача, конечный отрезок, смешанная производная в уравнении, постоянные коэффициенты, закрепленные концы, существование решения, единственность решения, формула для решения, расходящиеся ряды.

The solution of the initial boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative[1]

V. S. Rykhlov (Saratov, Russia)

rykhlovvs@yandex.ru

An initial boundary value problem for a second-order inhomogeneous hyperbolic equation with constant coefficients and a mixed partial derivative is considered. The case of fixed ends is considered. It is assumed that the roots of the characteristic equation are simple and lie on the real axis on different sides of the origin. Classical and generalized statements of initial boundary value problems are determined. Theorems of the uniqueness of the solution and the existence of the solutions for two special cases are formulated. Formulas of the solutions for these special cases are given.

Keywords: hyperbolic equation, second order, initial boundary value problem, generalized initial boundary value problem, finite segment, mixed derivative in the equation, constant coefficients, fixed ends, existence of the solution, uniqueness of the solution, formula for the solution, divergent series.

Введение

Рассмотрим начально-граничную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,+\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \tag{3}$$

где все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные и $p_j \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in L_1(Q_T)$, $Q_T=[0,1]\times[0,T]$ при любом $T>0$.

Рассматривается случай гиперболического уравнения (1), то есть выполняется условие $p_1^2-4p_2>0$. В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического многочлена вещественны. Предположим, что они удовлетворяют неравенствам

$$\omega_1<0<\omega_2. \tag{4}$$

При рассмотрении этой задачи используются метод из статьи [1]. В этой же статье дается история вопроса.

Аналогично [1] под классическим решением (или классическим решением почти всюду (п.в.), или более кратко решением п.в.) понимается функция $u(x,t)$, которая непрерывна вместе с $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$ и при этом $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t))$ абсолютно непрерывны по x и t, причем $u_{xt}(x,t)=u_{tx}(x,t)$ (в случае когда $u_{xt}(x,t)$ и $u_{tx}(x,t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [2]), удовлетворяющая условиям (2)–(3) и п.в. уравнению (1).

В случае классического решения задачи (1)–(3) необходимо должны выполняться условия гладкости: $\varphi(x), \varphi'(x), \psi(x)$ абсолютно непрерывны и условия согласования: $\varphi(0)=\varphi(1)=\psi(0)=\psi(1)=0$.

Единственность классического решения

Обозначим через $L(\lambda)$ оператор-функцию (о.ф.), порожденную дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda):=y''+\lambda p_1 y'+\lambda^2 p_2 y,$$

и краевыми условиями

$$y(0)=y(1)=0.$$

Пусть R_λ есть резольвента этой о.ф., $G(x,\xi,\lambda)$ — функция Грина, а $R_{1\lambda}$ есть интегральный оператор с ядром $G_\xi(x,\xi,\lambda)$.

Собственные значения $L(\lambda)$, очевидно, простые и выражаются по формулам

$$\lambda=\frac{2k\pi i}{\omega_2-\omega_1}, \quad k=\pm1,\pm2,\ldots.$$

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda-\lambda_k|=\delta\}$, где $\delta>0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному с.з.

Теорема 1. *Пусть $u(x,t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) с дополнительным условием (4). Если $u_{tt} \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, то оно единственно и находится по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \Bigg(\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot,\tau)\, d\tau - \\ -p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda}\varphi + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi \Bigg) d\lambda, \tag{5}$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0,1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Теорема 1 говорит о том, что формальный ряд (5) и начально-граничная задача (1)–(3) тесно связаны. Аналогично [1] расширим понятие этой связи.

Ряд справа в формуле (5) имеет смысл для любых интегрируемых на [0,1] функций $\varphi(x), \psi(x)$ и функции $f(x,t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, хотя он может быть и расходящимся. В этом случае естественно говорить, что (5) также является формальным решением начально-граничной задачи (1)–(3), понимаемой чисто формально. Так же, как и в [1], будем называть ее обобщенной начально-граничной задачей.

Существование решений в двух частных случаях

Введем следующие обозначения для функции $f(x) \in L_1[0,1]$:

$$f^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in \big[0, \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\big], \\ f\big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}(\xi-1)\big), & \xi \in \big[\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}, 1\big]; \end{cases}$$

$$f_*(\xi) = \begin{cases} f\big(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\xi\big), & \xi \in \big[0, \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\big], \\ 0, & \xi \in \big[\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}, 1\big]. \end{cases}$$

Через $\tilde{f}(x)$ будем обозначать 1-периодическое продолжение функции $f(x)$, $x \in [0,1]$, то есть $\tilde{f}(x) := f(\{x\})$, $x \in \mathbb{R}$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть x.

Используя понятие расходящегося ряда в понимании Эйлера [3,4], формальному ряду (5) в случае $\psi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$ назначаем следующую сумму

$$u_1(x,t) = \frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\tilde{\varphi}^*\Big(\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big) - \tilde{\varphi}^*\Big(\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)\Bigg) + \\ + \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\tilde{\varphi}_*\Big(\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big) - \tilde{\varphi}_*\Big(\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)\Bigg). \tag{6}$$

По определению считаем, что (6) есть решение обощенной смешанной задачи (1)–(3) в случае $\psi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$.

Основанием правильности такого определения служит

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (4), *функции* $\varphi(x)$ *и* $\varphi'(x)$ *абсолютно непрерывны,* $\varphi''(x) \in L_1[0,1]$ *и* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. *Тогда функция* $u_1(x,t)$ *из* (6) *является классическим решением задачи* (1)–(3) *в случае* $\psi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$.

Обозначим

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x \psi(\xi)\, d\xi.$$

Опять, используя понятие расходящегося ряда в понимании Эйлера [3,4], формальному ряду (5) в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$ назначаем следующую сумму

$$\begin{gathered}u_2(x,t) = -\frac{p_2}{\omega_2 - \omega_1}\biggl(\tilde{\Psi}^*\Bigl(\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Bigr) - \tilde{\Psi}^*\Bigl(\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Bigr) + \\ + \tilde{\Psi}_*\Bigl(\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Bigr) - \tilde{\Psi}_*\Bigl(\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Bigr)\biggr).\end{gathered} \tag{7}$$

По определению считаем, что (7) есть решение обощенной смешанной задачи (1)–(3) в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$.

Основанием правильности такого определения служит

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* (4), *функция* $\psi(x)$ *абсолютно непрерывна,* $\psi'(x) \in L_1[0,1]$ *и* $\psi(0) = \psi(1) = 0$. *Тогда функция* $u_2(x,t)$ *из* (7) *является классическим решением задачи* (1)–(3) *в случае* $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238.

[2] *Толстов Г. П.* О второй смешанной производной // Матем. сб. 1949. Т. 24(66), № 1. С. 27–51.

[3] *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М.;Л. : ГИТТЛ, 1949. 580 с.

[4] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Современные методы теории краевых задач: материалы междунар. конф: Воронежская весенняя матем. школа «Понтрягинские чтения – XXX» (Воронеж, 3–9 мая 2019). Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 291–300.