УДК 517.53

Линейные непрерывные функционалы пространств Привалова[1]

Е. Г. Родикова (Брянск, Россия)
evheny@yandex.ru

В работе получено дискретное описание линейных непрерывных функционалов пространств И. И. Привалова.

Ключевые слова: класс Привалова, плоский класс Привалова, линейные непрерывные функционалы.

Continuous linear functionals on the Privalov spaces[1]

E. G. Rodikova (Bryansk, Russia)
evheny@yandex.ru

The description of continuous linear functionals of the Privalov spaces in a disk is obtained in this paper.

Keywords: Privalov spaces, Privalov classes by area, linear continuous functionals.

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D. При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И.И. Привалова:

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta < +\infty \right\},$$

где $\ln^+ |a| = \max(\ln |a|, 0)$, $\forall a \in \mathbb{C}$.

Отметим, что классы Π_q впервые были рассмотрены И. И. Приваловым в [3]. При $q = 1$ они совпадают с хорошо известным классом Р. Неванлинны (см. [2]).

При всех $0 < q < +\infty$ введем также в рассмотрение класс

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Будем называть его плоским классом И. И. Привалова или классом И. И. Привалова по площади. При $q = 1$ плоский класс Привалова совпадает с хорошо известным плоским классом Р. Неванлинны, входящим в шкалу классов Неванлинны-Джрбашяна.

В данной работе получено описание множества непрерывных линейных функционалов на пространствах $\Pi_q\,(0 < q < 1)$, $\tilde{\Pi}_q\,(q > 0)$. Отметим, что вопросы описания линейных функционалов на различных пространствах аналитических функций исследовались в работах А. Тейлора [7] - на пространствах Харди $H^p\,(p > 1)$, П. Дюрена, Б. Ромберга и А. Шилдса [5] - на пространствах Харди $H^p\,(0 < p < 1)$, Н. Янагиара [8] - на пространствах Смирнова, Р. Meштровича и А.В. Субботина [1] - на пространствах $\Pi_q\,(q > 1)$. Для доказательства основных результатов мы используем методы работ [8], [1]. Суть метода заключается в следующем: вопрос о нахождении общего вида линейного функционала на некотором пространстве аналитических в круге X функций сводится к отысканию вида произвольного коэффициентного мультипликатора, действующего из класса X в класс ограниченных аналитических функций H^∞.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Любой непрерывный линейный функционал Φ над пространством Привалова $\Pi_q\,(0 < q < 1)$ определяется формулой*

$$\Phi(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k, \tag{1}$$

где числа $\{b_k\}$ с условием

$$b_k = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{1}{1+q}}\right)\right), \quad k \to +\infty, \quad c > 0, \tag{2}$$

являются коэффициентами Тейлора некоторой аналитической функции в D, $\{a_k\}$ — коэффициенты Тейлора функции $f \in \Pi_q\,(0 < q < 1)$. При этом ряд в правой части (1) абсолютно сходится.

Обратно, каждая последовательность $\{b_k\}$ с условием (2) определяет по формуле (1) линейный непрерывный функционал Φ над пространством Привалова $\Pi_q\,(0 < q < 1)$.

Теорема 2. *Любой непрерывный линейный функционал Φ над плоским классом Привалова $\tilde{\Pi}_q\,(q > 0)$ определяется формулой*

$$\Phi(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k, \tag{3}$$

где числа $\{b_k\}$ с условием

$$b_k = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{2}{2+q}}\right)\right), \quad k \to +\infty, \quad c > 0, \tag{4}$$

являются коэффициентами Тейлора некоторой аналитической функции в D, $\{a_k\}$ — коэффициенты Тейлора функции $f \in \tilde{\Pi}_q$. При этом ряд в правой части (3) абсолютно сходится.

Обратно, каждая последовательность $\{b_k\}$ *с условием* (4) *определяет по формуле* (3) *линейный непрерывный функционал* Φ *над плоским классом Привалова* $\tilde{\Pi}_q\,(q > 0)$.

При доказательстве теоремы 1 использовалось описание коэффициентных мультипликаторов из пространства И. И. Привалова, полученное в работе [6], а при доказательстве теоремы 2 - описание коэффициентных мультипликаторов из плоского класса И. И. Привалова [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Мештрович Р., Субботин А. В.* Мультипликаторы и линейные функционалы пространств И. И. Привалова голоморфных функций в круге // Докл. АН. 1999. Т. 365, № 4. С. 452–454.

[2] *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М.-Л. : ГИТТЛ, 1941. 388 с.

[3] *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. М. : Изд. МГУ, 1941. 206 с.

[4] *Родикова Е. Г.* О коэффициентных мультипликаторах плоских классов Привалова // Уфимский матем. журн. 2021. Т. 13, № 4. Р. 82–93.

[5] *Duren P., Romberg B., Shields A.* Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$ // J. Reine Angew. Math. 1969. Vol. 238. P. 32–60.

[6] *Rodikova E. G.* Coefficient multipliers for the Privalov class in a disk // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2018. Т. 11, вып. 6. С. 723–732.

[7] *Taylor A.Ė.* Banach spaces of functions analytic in the unit circle // II Studia Math. 1951. Vol. 12. P. 25-50.

[8] *Yanagihara N.* Multipliers and linear functionals for the class N^+ // Transactions of the Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 180. C. 449–461.