УДК 517.518.4

Равномерные по $a \in (0,1)$ двусторонние оценки функций $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos(kx)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin(kx)$ через первые слагаемые их асимптотических рядов[1]

А. Ю. Попов, Т. В. Родионов (Москва, Россия)
rodionovtv@mail.ru

Для функций $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos(kx)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin(kx)$ на $(0,\pi]$ получены равномерные по $0 < a < 1$ двусторонние оценки через первые слагаемые их асимптотических рядов.

Ключевые слова: специальные тригонометрические ряды, полилогарифм.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00584).

Uniform with respect to $a \in (0,1)$ two-sided estimates of functions $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos(kx)$ and $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin(kx)$ by first members of their asymptotic series[1]

A. Yu. Popov, T. V. Rodionov (Moscow, Russia)
rodionovtv@mail.ru

For functions $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos(kx)$ and $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin(kx)$ on $(0,\pi]$ two-sided estimates by means of first members of their asymptotic series are obtained. These estimates are uniform with respect to $0 < a < 1$.

Keywords: special trigonometric series, polylogariphm.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00584).

Специальные тригонометрические ряды

$$f(x,a) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos kx, \quad g(x,a) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin kx, \quad a > 0,$$

часто встречаются в математической литературе. Известны следующие асимптотики [1, гл. II (13.11) и гл. V, § 2]:

$$f(x,a) \sim \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma(1-a)x^{a-1}, \quad x \to 0+, \quad a \in (0,1), \tag{1}$$

$$g(x,a) \sim \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma(1-a)x^{a-1}, \quad x \to 0+, \quad a \in (0,2). \tag{2}$$

Равномерны ли они по $a \in (0,1)$? Мы доказали равномерность асимптотики (2) и равномерность видоизменённой асимптотики (1), добавив в её правую часть отрицательное слагаемое $\zeta(a)$ (ζ — дзета-функция Римана). Обозначим

$$f_0(x,a) = \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma(1-a)x^{a-1} + \zeta(a), \quad g_0(x,a) = \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma(1-a)x^{a-1}.$$

Напомним, что функция $\zeta(a)$ убывает на полуинтервале $[0,1)$, $\zeta(0) = -1/2$, $\lim\limits_{a\to 1-}\zeta(a) = -\infty$.

Теорема. *При любых $x \in (0,\pi]$ и $a \in (0,1)$ верны двойные неравенства*

$$f_0(x,a) + \frac{\zeta(3)}{4\pi^3}x^2\sin\frac{\pi a}{2} < f(x,a) < f_0(x,a) + \frac{x^2}{18}\sin\frac{\pi a}{2}, \tag{3}$$

$$g_0(x,a) - \frac{x}{2} < g(x,a) < g_0(x,a) - \frac{x}{12}. \tag{4}$$

Замечание 1. Нетрудно убедиться в справедливости равенства $\lim\limits_{a\to 1} g_0(x,a) = \pi/2$ (при любом $x > 0$), которое вместе с тождеством $g(x,1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k} = \dfrac{\pi - x}{2}$ показывает, что оценка снизу в (4) при $a = 1$ превратилась бы в равенство. Это означает, что функцию $g(x,a)$ (при всех $a \in (0,1)$ и $x \in (0,\pi]$) нельзя оценить снизу через $g_0(x,a) - kx$, где k — какое-либо число из интервала $(0, 1/2)$. В том же смысле неулучшаема и оценка сверху в (4).

Замечание 2. Константу $\dfrac{\zeta(3)}{4\pi^3}$ в левом неравенстве (3) увеличить нельзя: после её замены бóльшим числом неравенство при достаточно близких к нулю a и x перестало бы выполняться. Что же касается правого неравенства, то в нём нельзя заменить $1/18$ на число, меньшее $1/24$: тогда неравенство не будет выполняться при достаточно малых x и a, близких к 1. В действительности, мы вывели более сильное, но более громоздкое неравенство

$$f(x,a) < f_0(x,a) + \frac{x^2}{24}\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)^{-1}\sin\frac{\pi a}{2}, \; 0 < a < 1, \; 0 < x \leqslant \pi,$$

в котором нельзя уменьшить постоянную $1/24$, но, возможно, удастся уменьшить множитель $\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)^{-1}$.

Доказательство основано на разложении в ряд

$$\mathrm{L}_a(z) - \Gamma(1-a)\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(a-n)}{n!}(\ln z)^n, \tag{5}$$

где L_a (полилогарифм) — аналитическое продолжение суммы степенного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}z^k$ из круга $|z| < 1$ в $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Под $\ln z$ понимается $\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$, и в разложении (5) предполагается, что $z = re^{i\varphi}$ лежит на римановой поверхности $\{0 < r < +\infty, -2\pi < \varphi < 2\pi\}$. Ряд в (5) сходится в области $|\ln z| < 2\pi$, лежащей на этом многообразии. После вычитания из $\mathrm{L}_a(z)$ функции $\Gamma(1-a)\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1}$ особенность в точке $z = 1$ (при $a \in (0, 1)$ она является точкой ветвления как у степенной функции w^p в точке $w = 0$) "стирается". Разложение (5) найдено довольно давно (см., например, [3] и [2, 1.11 (8)]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М. : Мир, 1965.

[2] *Erdélyi A. (ed.)* Higher Transcendental functions. New York : McGraw Hill, 1953.

[3] *Truesdell C.* On a function which occurs in the theory of the structure of polymers // Ann. Math. (2). 1945. Vol. 46, № 1. P. 144–157.