УДК 517.518.126

О векторнозначных интегралах Мак-Шейна и Хенстока[1]

К. М. Нараленков (Москва, Россия)
naralenkov@gmail.com

Получены достаточные условия для интегрируемости по Мак-Шейну на счётной системе замкнутых множеств в классе измеримых по Риману и интегрируемых по Хенстоку векторнозначных функций.

Ключевые слова: измеримая по Риману функция, ограниченная вариация, AC_* и AC функции, интегралы Мак-Шейна и Хенстока, норма Алексича.

On the vector-valued McShane and Henstock integrals[1]

K. M. Naralenkov (Moscow, Russia)
naralenkov@gmail.com

We obtain sufficient conditions for a Riemann-measurable Henstock integrable vector-valued function to be McShane integrable on a sequence of closed sets.

Keywords: Riemann-measurable function, bounded variation, AC_* and AC functions, McShane and Henstock integrals, Alexiewicz norm.

Хорошо известно, что для действительнозначной функции, интегрируемой по Хенстоку на отрезке, этот отрезок покрывается счётной системой замкнутых множеств, на каждом из которых рассматриваемая функция интегрируема по Мак-Шейну. Доказательство данного факта существенно использует то, что для действительнозначных функций интеграл Хенстока эквивалентен узкому интегралу Данжуа, а интеграл Мак-Шейна — интегралу Лебега. С другой стороны, в [1] построен пример интегрируемой по Хенстоку на отрезке функции со значениями в пространстве c_0, которая не интегрируема по Мак-Шейну ни на каком невырожденном подотрезке. Таким образом, для получения аналогов упомянутого выше результата для векторнозначных функций потребуются или дополнительные условия на пространство значений или ограничения на рассматриваемую функцию (или же на её неопределённый интеграл). Понятие *измеримости по Риману* естественным образом возникает при рассмотрении векторнозначных обобщений интеграла Римана [2]. Все измеримые по Бохнеру функции измеримы по Риману, однако измеримые по Риману функции могут иметь несепарабельную область значений. В настоящей работе, мы продолжаем изучение взаимоотношения векторнозначных интегралов Мак-Шейна и Хенстока в классе измеримых по Риману функций, начатое в [3], [4].

Пусть X — действительное банахово пространство и $[a,b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. На протяжении всей работы I и E будут обозначать произвольный невырожденный подотрезок и произвольное измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[a,b]$ соответственно. Если $F : [a,b] \to X$, то $\Delta F(I)$ обозначает *приращение* F на I. Положительная функция на E будет называться *масштабом* на множестве E. Наконец, μ обозначает меру Лебега на действительной оси.

Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a,b]$ есть конечный набор $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ пар отрезок-точка такой, что отрезки $\{I_k\}_{k=1}^K$ попарно не перекрываются и $t_k \in [a,b]$ для каждого k. Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a,b]$ называется *частичным разбиением Хенстока* отрезка $[a,b]$ если $t_k \in I_k$ для всех k. Частичное разбиение Мак-Шейна (Хенстока) отрезка $[a,b]$ называется *разбиением Мак-Шейна (Хенстока)* отрезка $[a,b]$ если его отрезки *покрывают* отрезок $[a,b]$.

Определение 1. Функция $f : [a,b] \to X$ называется *интегрируемой по Мак-Шейну (Хенстоку)* на $[a,b]$, с *интегралом Мак-Шейна (Хенстока)* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется масштаб δ на $[a,b]$ такой, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} f(t_k)\mu(I_k) - w \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого разбиения Мак-Шейна (Хенстока) $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ отрезка $[a,b]$ с условием $I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k))$ для всех k.

Определение 2. Функция $f : [a,b] \to X$ $\mathcal{M}$-*интегрируема* ($\mathcal{H}$-*интегрируема*) на $[a,b]$ если она интегрируема по Мак-Шейну (Хенстоку) на $[a,b]$ и каждому $\varepsilon > 0$ в определении интеграла Мак-Шейна (Хенстока) функции f по $[a,b]$ соответствует *измеримый* масштаб δ. Функция f $\mathcal{M}$-*интегрируема* ($\mathcal{H}$-*интегрируема*) на множестве E если функция $f \cdot \chi_E$, где χ_E обозначает *характеристическую функцию* множества E, $\mathcal{M}$-*интегрируема* ($\mathcal{H}$-*интегрируема*) на $[a,b]$.

Определение 3. Функция $f : E \to X$ называется *измеримой по Риману* на E если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество $F \subset E$, удовлетворяющее условию $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$, и положительное число δ такие, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} \{f(t_k) - f(t'_k)\} \cdot \mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого конечного набора $\{I_k\}_{k=1}^K$ попарно неперекрывающихся отрезков с условием $\max\limits_{1\le k\le K}\mu(I_k)<\delta$ и для всех $t_k, t'_k \in I_k \cap F$.

Все $\mathcal{H}$-интегрируемые функции обязательно измеримы по Риману, более того, интеграл Мак-Шейна (Хенстока) оказывается эквивалентен $\mathcal{M}$-интегралу ($\mathcal{H}$-интегралу) для измеримых по Риману функций [2].

Определение 4. $F:[a,b]\to X$ есть *sVB функция* на E если

$$\mathrm{sV}(F,E)=\sup\sum_{k=1}^{K}\|\Delta F(I_k)\|<\infty,$$

где супремум берется по всем наборам попарно неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^K$ с условием $\partial I_k\subset E$ для всех k.

Определение 5. $F:[a,b]\to X$ есть *VB_* функция* на E если

$$\mathrm{V}(F,E)=\sup\left\|\sum_{k=1}^{K}\Delta F(I_k)\right\|<\infty,$$

где супремум берется по всем наборам попарно неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^K$ с условием $\partial I_k\cap E\neq\varnothing$ для всех k.

Определение 6. $F:[a,b]\to X$ есть *AC (AC_*) функция* на E если для каждого $\varepsilon>0$ существует $\eta>0$ такое, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{K}\Delta F(I_k)\right\|<\varepsilon$$

выполняется для каждого конечного набора попарно неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^K$ с условием $\partial I_k\subset E$ ($\partial I_k\cap E\neq\varnothing$) для всех k и $\sum\limits_{k=1}^{K}\mu(I_k)<\eta$.

Определение 7. $F:[a,b]\to X$ есть *$sVBG$ (VBG_*, ACG, ACG_*) функция* на E если можно покрыть счётной системой множеств, на каждом из которых F есть sVB (VB_*, AC, AC_*) функция.

Определение 8. Пусть $f:[a,b]\to X$ интегрируема на $[a,b]$. Тогда *норма Алексича* функции f определяется равенством

$$\|f\|_A=\sup_{a<t\le b}\left\|\int_a^t f\right\|.$$

Теорема 1. *Пусть X не содержит подпространства, изоморфного c_0. Если $f:[a,b]\to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a,b]$, то $[a,b]$ можно* *покрыть счётной системой замкнутых множеств, на каждом из которых неопределённый интеграл функции f есть VB_* и AC функция, а также функция f $\mathcal{M}$-интегрируема.*

Теорема 2. *Пусть $f : [a,b] \to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a,b]$. Если неопределённый интеграл функции f есть $sVBG$ функция на $[a,b]$, то $[a,b]$ можно покрыть счётной системой замкнутых множеств, на каждом из которых неопределённый интеграл функции f есть sVB и AC функция, а также функция f $\mathcal{M}$-интегрируема.*

Теорема 3. *Пусть $f : [a,b] \to X$ интегрируема по Хенстоку на $[a,b]$. Если существует множество $N \subset [a,b]$ такое, что $\mu(N) = 0$ и $[a,b] \setminus N$ можно покрыть счётной системой замкнутых множеств, на каждом из которых f интегрируема по Мак-Шейну, то $[a,b] \setminus N$ есть объединение счётной возрастающей последовательности замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, на каждом из которых f интегрируема по Мак-Шейну и условие*

$$\|f\chi_{F_n} - f\|_A < \frac{1}{n} \tag{1}$$

выполнено для всех n.

Следствие 1. *Пусть $f : [a,b] \to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a,b]$ и выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*

1. *X не содержит подпространства, изоморфного c_0;*

2. *неопределённый интеграл функции f есть $sVBG$ функция на $[a,b]$.*

Тогда $[a,b]$ есть объединение счётной возрастающей последовательности замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, на каждом из которых f интегрируема по Мак-Шейну и условие (1) выполнено для всех n.

Теорема 4. *Пусть функция $f : [a,b] \to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a,b]$. Тогда найдется множество $N \subset [a,b]$ такое, что $\mu(N) = 0$ и $[a,b] \setminus N$ есть объединение счётной возрастающей последовательности замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, на каждом из которых f ограничена и условие (1) выполнено для всех n.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Naralenkov K. M.* A Henstock-Kurzweil integrable vector-valued function which is not McShane integrable on any portion // Quaestiones Math. 2012. Vol. 35, № 1. P. 11–21.

[2] *Naralenkov K. M.* A Lusin type measurability property for vector-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 417, № 1. P. 293–307.

[3] *Caponetti D., Marraffa V., Naralenkov K.* On the integration of Riemann-measurable vector-valued functions // Monatsh. Math. 2017. Vol. 182, № 3. P. 513–536.

[4] *Нараленков К. М.* О дескриптивных характеристиках некоторых векторнозначных обобщений интеграла Римана // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. С. 221–224.