УДК 517.53

Некоторые интегральные операторы в областях с границами класса Лаврентьева[1]

Н. М. Махина (Брянск, Россия)
mahinanm@yandex.ru

В данной работе строится ограниченный интегральный оператор, отображающий весовое пространство измеримых функций на соответствующее пространство аналитических функций, в случае, если данные пространства рассматриваются на произведениях областей с границами класса Лаврентьева.

Ключевые слова: конформное отображение, проектор, произведение областей, класс кривых Лаврентьева.

Some integral operators in domains with the boundaries of the Lavrentiev class[1]

N. M. Makhina (Bryansk, Russia)
mahinanm@yandex.ru

In this paper we construct a bounded integral operator, mapping the weight space of measurable functions on the corresponding space of analytic functions, if these spaces are considered on the products of domains with the boundaries of the Lavrentiev class.

Keywords: conformal mapping, projector, product of domains, Lavrentiev curve class.

Пусть (L) – множество кривых Γ (класс кривых Лаврентьева) таких, что $l(w_1, w_2) \le c|w_1 - w_2|$, где точки w_1, w_2 – произвольно выбранные на Γ, $l(w_1, w_2)$ – длина кратчайшей дуги Γ' на кривой Γ, соединяющей точки w_1, w_2 (см. [1], [2]).

В работах автора (см., например, [3]-[6]) рассматриваются вопросы, связанные с возможностью построения ограниченных интегральных операторов в весовых классах аналитических функций типа Бергмана. Отмечается, что решение подобного рода задач во многих случаях тесно связано с геометрическими характеристиками границы области аналитичности, которые, в свою очередь, могут выражаться в различного рода оценках конформно отображающей функции.

Пусть $H(G)$ – множество всех аналитических функций в G; $L^p_\beta(G)$ – класс функций f, измеримых по Лебегу, таких, что

$$\|f\|^p_{L^p_\beta(G)} = \int\limits_G |f(w)|^p \, d^\beta(w, \partial G) dm_2(w) < +\infty \,, \beta > -1, \, 0 < p < +\infty,$$

$A^p_\beta(G) = H(G) \cap L^p_\beta(G)$.

Теорема 1 (см. [7]). Пусть G – некоторая односвязная область на комплексной плоскости с границей класса (L), $\varphi(z)$ – функция Римана, отображающая S на G, $\varphi(0) = \omega_0$, $\omega_0 \in G, \varphi'(0) > 0$. Тогда для $1 < p < +\infty$ справедлива оценка:

$$\int\limits_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2}(1-|z|)^\beta \chi^p_\gamma(z)}{|1-\overline{\zeta}z|^{\eta+2}|1-\overline{\xi}z|^\mu} dm_2(z) \leq \frac{\tilde{\tilde{\tilde{c}}}\,|\varphi'(\zeta)|^{\beta+2}(1-|\zeta|)^\beta \chi_\gamma(\zeta)\chi_\gamma^{\frac{p}{q}}(\xi)}{(1-|\zeta|)^{\eta+2-\frac{2}{p}}(1-|\xi|)^{\mu-\frac{2}{q}}},$$

где $\chi_\gamma(\zeta) = (1-|\zeta|)^{-\frac{\gamma}{pq}}$; $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$, $\beta > -1$, $0 < \dfrac{\gamma}{q} < \beta p + 1$, $\eta \geq \beta - 2 + \dfrac{3}{p} - \dfrac{\gamma}{pq}$; $\mu > 2 - \dfrac{\gamma}{q^2}$, $\tilde{\tilde{\tilde{c}}} = const > 0$.

Теорема 2. (см. [6]). Пусть G – односвязная область на комплексной плоскости с границей класса (L), $\varphi(z)$ – функция, конформно отображающая S на G, $\varphi(0) = \omega_0$, $\omega_0 \in G, \varphi'(0) > 0$, $\psi = \varphi^{-1}$. Тогда

$$F(w) = P_\eta(f)(w) = \frac{\eta+1}{\pi}\int\limits_G \frac{(1-|\psi(\mu)|^2)^\eta}{(1-\overline{\psi(\mu)}\psi(w))^{\eta+2}} f(\mu)\,|\psi'(\mu)|^2\, dm_2(\mu)$$

непрерывно отображает $L^p_\beta(G)$ на $A^p_\beta(G)$, $1 \leq p < +\infty$, $\beta > -1$, $\eta > 2(\beta+1)$, причем при $c(\beta,p) = const > 0$,

$$\|F\|_{A^p_\beta(G)} \leq c(\beta,p)\,\|f\|_{L^p_\beta(G)}\,.$$

Результат данной теоремы основан на оценках модуля производной конформно отображающей функции (аналогов теоремы 1).

Пусть теперь $\{G_j\}_{j=1}^m$ – класс областей, ограниченных кривыми класса (L) и $\tilde{G} = G_1 \times ... \times G_m$.

По аналогии, обозначим, $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ – множество измеримых в $\tilde{G}$ функций, для которых

$$\|f\|_{L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} = \int\limits_{\tilde{G}} |f(w)|^p\, d^{\vec{\beta}}(w,\partial G) dm_{2m}(w) =$$

$$= \int\limits_{G_1} ... \int\limits_{G_m} |f(w_1,...,w_m)|^p \prod_{j=1}^m d^{\beta_j}(w_j,\partial G_j) dm_2(w_j) < +\infty,$$

где $0 < p < +\infty, \vec{\beta} = (\beta_1,...,\beta_m), \beta_j > -1, j = \overline{1,m}; dm_{2m} = dm_2...dm_2$ – мера Лебега на $\tilde{G}$. Пусть $A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G}) = H(\tilde{G}) \cap L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$.

Оказывается, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. Пусть $\{G_j\}_{j=1}^{m}$ – вышеуказанное множество областей с границами класса (L), $\tilde{G} = G_1 \times ... \times G_m$.

Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{m}$ – множество функций, конформно отображающих единичный круг S на G_j, $\varphi_j(0) = w_0^j$, $w_0^j \in G_j$, $\varphi_j'(0) > 0$, $\psi_j = \varphi_j^{-1}$, $j = \overline{1, m}$.

Тогда

$$P_{\vec{\eta}}(f)(\vec{w}) \stackrel{def}{=} F(\vec{w}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\eta_j + 1}{\pi} \int\limits_{G_1} ... \int\limits_{G_m} f(\mu_1, ..., \mu_n) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \frac{(1 - |\psi_j(\mu_j)|^2)^{\eta_j} \left|\psi_j'(\mu_j)\right|^2}{(1 - \overline{\psi_j(\mu_j)}\psi_j(w_j))^{\eta_j + 2}} dm_2(\mu_1)...dm_2(\mu_n)$$

непрерывно отображает $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ на $A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$, $1 < p < +\infty$, $\beta_j > -1$, $j = \overline{1, m}$, при всех $\eta > \eta_0$, $\eta_0 = \eta_0(\vec{\beta})$, $\exists c = c(\vec{\beta}, p)$:

$$\|F\|_{A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} \leq c \, \|f\|_{L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. Москва : Мир, 1969. 136 с.

[2] *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. Москва : Мир, 1984. 469 с.

[3] *Махина Н. М.* Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей // Вестник Омского университета. 2018. Т. 23, № 3. С. 47–51.

[4] *Махина Н. М.* Об ограниченности некоторых интегральных операторов в областях с асимптотически конформными границами // Ученые записки Брянского государственного университета. 2019. № 3(15). С. 14–16.

[5] *Shamoyan R. F., Makhina N. M.* On continuous linear functionals in some weighted functional classes on product domains // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. Vol. 12. P. 651–678.

[6] *Tkachenko N. M., Shamoyan F. A.* The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2009. Vol. 5, № 2. P. 192–210.

[7] *Махина Н. М.* Некоторые свойства классов BMOA и интегральные оценки конформно отображающей функции в областях с границей типа Лаврентьева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2019. Т. 51, № 4. С. 487–495.