УДК 517.5

О непрерывности некоторых классов и подклассов отображений с s-усредненной характеристикой[1]

А. Н. Малютина (Томск, Россия)
nmd@math.tsu.ru

По известной теореме С. Л. Соболева [1], если G ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}$ и функция $f : G \to \mathbb{R}^1$, $f \in W^1_{p,loc}(G)$, $p > n$, то она непрерывна в G. Если $1 < p \leq n$, этого свойства, вообще говоря, может и не быть. В настоящей работе мы обобщаем результаты, полученные в [2] и находим необходимые условия, при которых некоторые классы и подклассы отображений с s-усредненной характеристикой [7] $1 < s \leq n$ будут непрерывными. Примеры подклассов таких отображений с указанными выше свойствами приведены в [7, 8].

Ключевые слова: отображение с s-усредненной характеристикой, дифференциальные свойства, непрерывность.

On the continuity of some classes and subclasses of mappings with s-averaged characteristic[1]

A. N. Malyutina (Tomsk, Russia)
nmd@math.tsu.ru

According to the well-known S. L. Sobolev's embedding theorem [1], if G is a bounded domain of Euclidean space and a function $f : G \to \mathbb{R}^1$, $f \in W^1_{p,loc}(G)$, $p > n$, then this function is continuous in G. If $1 < p \leq n$, then this property may not exist. In this paper we generalize the results obtained in [2] and find the necessary conditions of the continuity of some classes and subclasses of mappings with saveraged characteristic [7]. Examples of subclasses of such mappings are given in [7, 8].

Keywords: mapping with s-averaged characteristic, differential properties, continuity.

Введение

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^n$, $f \in W^1_n(G)$,$1 < s \leq n$, пусть для любого $y \in G$ выполняются неравенства

$$\int_G (\lambda(x, f))^s k(|x - y|) d\sigma_x < M, \tag{1}$$

$$\int_G (\lambda^*(x, f))^{s^*} k(|x - y|) d\sigma_x < M^*, \tag{2}$$

где функция $k(t)$ определена при $t > 0$, положительна, не возрастает и $\lim\limits_{t\to 0+} k(t) = +\infty$. В случае (1) будем говорить, что отображение с (s,k)-усредненной характеристикой, а в случае (2) – отображение с (s^*,k)-усредненной характеристикой, где функция $f \in W^1_n(G,k,M)$, $1 < s < n$ [7].

Теорема 1. *Пусть f, отображение с (s^*,k)-усредненной характеристикой и выполнено неравенство*

$$\int\limits_0^a k^{\frac{1}{s^*}}(t) t^{\frac{n}{s^*}} dt < +\infty, \ \alpha > n - p. \tag{3}$$

Если $f \in W^1_{n,loc}(G)$, $f^{-1} \in W^1_{n,loc}(G)$, $1 < s \leq n$ и для любой точки $y \in G$

$$I\left(\int\limits_G \left(\frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)}\right)^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x\right) < M, \tag{4}$$

если $\alpha > n - s$, то на любом компакте A из области G функция f эквивалентна некоторой непрерывной функции.

Доказательство теоремы следует из теоремы Арцела. Для этого построим равностепенно непрерывную и равномерно ограниченную на K последовательность функций, сходящуюся к функции f почти везде в G. Рассмотрим последовательность ε-усредненний функции f по С. Л. Соболеву при достаточно малых ε. Здесь ε-усреднением функции f по С. Л. Соболеву [1] является функция

$$f_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right) f(u) du = \varepsilon^{-n} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) f(x-u) du.$$

Из [1, с. 79] следует, что вне области G функция $f_\varepsilon = 0$. Известно [1], что функция f_ε бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$ и $\|f_\varepsilon - f\|_p$, $\mathbb{R}^n \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и что $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\varepsilon$.

Существуют открытые множества G_1 и G_2 такие, что компакт

$$K \subset G_1 \subset G_2, \ \overline{G_1} \subset G_2, \ \overline{G_2} \subset G$$

где $\overline{G_i}$ - замыкание множества G_i,$i = 1, 2$. Покажем, что для достаточно малых ε

$$I\left(\int\limits_G \frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)} \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x\right) < M, y \in G_2$$

Используя обобщенное неравенство Минковского [1] и условие (1) получим

$$I\left(\int\limits_G \frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)}\|x-y\|^{-\alpha}d\sigma_x\right)=$$

$$\left[\int\limits_{G_2}\varepsilon^{-n}\int\limits_{B(0,\varepsilon)}\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\frac{|\triangle f(x-u)|^n}{J(x,f)}du\|x-y\|^{\alpha}d\sigma_x\right]^{\frac{1}{s}}\leq$$

$$\varepsilon^{-n}\int\limits_{B(0,\varepsilon)}\left[\int\limits_{G_2}\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\left(\frac{|\triangle f(x-u)|^n}{J(x,f)}\right)^s\|x-y\|^{\alpha}d\sigma_x\right]^{\frac{1}{s}}du\leq$$

$$\varepsilon^{-n}M\int\limits_{B(0,\varepsilon)}\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)=M, \tag{5}$$

если $(y-u)\in G$, т.е. при $\varepsilon<\varepsilon_0$, где ε_0 меньше расстояния от границы множества G_2 до границы G. Из неравенства (5) следует, что $\forall y\in G_2$ выполнено неравенство:

$$\left(\int\limits_G \frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)}\|x-y\|^{-\alpha}d\sigma_x\right)^s < n^{\frac{n}{2}}M,\ \text{если}\ B(y,r)\subset G_2.$$

Из (3) следует, что непрерывные функции f_ε при $\varepsilon<\varepsilon_0$ удовлетворяют условию леммы Ч. Морри [7], поэтому для любых точек x,y таких, что шар

$$B\left(\frac{x+y}{2},\frac{3}{2}|x-y|\right)\subset G_2,\ |f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(y)|<N|x-y|^\beta,$$

где $\beta=(\alpha-n+s)/s$ и N зависит от M,n,s,α.

Таким образом, семейство функций f_ε при $\varepsilon<\varepsilon_0$ на K равностепенно непрерывно.

Покажем, что функции f_ε при $\varepsilon<\varepsilon_0$ на K ограничены одним числом. Существует функция $\eta\in D$ такая, что ее носитель лежит в G_2 и $\eta(x)=1$ для $x\in G_1$ [3].

Функция $f_\eta\in W_p^1(\mathbb{R}^n)$. Доопределим $f\equiv 0$ вне области G. Для $\varphi\in D$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi dx = \int\limits_{G} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi dx =$$

$$\int\limits_{G} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} f \varphi dx + \int\limits_{G} \eta \varphi \frac{\partial f}{\partial x_i} dx \right) = \int\limits_{G} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} f \varphi dx - \int\limits_{G} f \eta \varphi \frac{\partial (\eta \varphi)}{\partial x_i} dx \right) =$$

$$- \int\limits_{G} f \eta \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx. \tag{6}$$

Из (6) следует, что обобщенная производная

$$\frac{\partial (\eta, f)}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{7}$$

Покажем, что для функции ηf

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)} \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) < M, \ \forall y \in K.$$

Из (7) следует, что

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \frac{|\triangle f|^n}{J(x,\eta f)} \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) \leq$$

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \frac{|\triangle f|^n}{J(x,\eta f)} f \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) +$$

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \eta \frac{|\triangle f|^n}{J(x,\eta f)} \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) \leq$$

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \frac{|\triangle f|^n}{J(x,\eta f)} f \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right)_{y \in G_2} +$$

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \eta \frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)} \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right)_{y \in G_2} \leq A d^{\frac{-\alpha}{s}} B + CM = M_1 \tag{8}$$

где $A = max\frac{\partial\eta}{\partial x_i}$, $x \in G_2$; $C = max\eta(x)$, $x \in G_2$; $B = \|f\|_{p,G}$; d - расстояние между границами множеств G_1 и G_2. Известно [6], что функция $\varphi \in D$ удовлетворяет условиям теоремы и, применяя условие Гельдера и оценки (8) получаем.

$$|\eta(x)f_\varepsilon(x)| = \left|\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial x_i}(x-y)\frac{y_i}{|y|^n}dy\sigma_y\right| \leq$$

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{G_2}\frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial y_i}(y)\frac{d\sigma_y}{|y-x|^{n-1}} \leq$$

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial y_i}(y)\right|^p|y-x|^{-\alpha}d\sigma_y\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int\limits_{G_2}|y-x|^m d\sigma_y\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq M_2,$$

где $m = \frac{np-p-\alpha}{p-1}$,$m+n>0$,$M_2$ зависит от M_1, n и диаметра области G_2.

Для $x \in K$, $\eta(x) \bigtriangledown f_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x)$ и $|f_\varepsilon| \leq M_2$ следовательно равномерно ограничена. Таким образом, на K семейство функций $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ равностепенно непрерывно, равномерно ограниченно, поэтому по теореме Арцеля из семейства можно выделить подпоследовательность функций $|f_n(x)|$ равномерно сходящуюся на K к некоторой непрерывной функций Ψ . Таким образом, получившиеся функции f и Ψ эквивалентны.

Замечание. *Построенные примеры показывают, что в рассматриваемых подмножествах функций класса $W_p^1(G)$ с $p = n$ существуют функции, не принадлежащие ни одному из классов $W_l^1(G)$ при $l > n$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л. : Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.

[2] *Никулина Н. Г.* О непрерывности оного класса функций // В сборнике «Экстремальные задачи теории функций». Томск: Изд-во Томск. ун-та. 1980. С. 78–83.

[3] *Ладыженская О. А., Уральцев Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973. 576 с.

[4] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1969. 480 с.

[5] *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М. : Наука, 1976. 280 с.

[6] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М. : Наука, 1973. 344 с.

[7] *Асанбеков У. К., Малютина А. Н.* Вычисление модуля сферического кольца // В книге: Комплексный анализ и приложения материалы VIII Петрозаводской международной конференции. 2016. С. 103–106.

[8] *Alipova K., Elizarova M., Malyutina A.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic // В сборнике: Комплексный анализ и его приложения материалы VII Петрозаводской международной конференции, 2014. С. 12–17.