УДК 517.5

Соболевские системы, ортогональные относительно весового скалярного произведения с двумя дискретными точками[1]

М. Г. Магомед-Касумов (Махачкала, Россия)
rasuldev@gmail.com

Получены представления функций из систем, ортогональных относительно дискретно-непрерывного весового скалярного произведения типа Соболева с двумя дискретными точками, в терминах функций, ортогональных относительно классических скалярных произведений.

Ключевые слова: весовое скалярное произведение, скалярного произведение типа Соболева, дискретно-непрерывное скалярное произведение.

Sobolev systems orthogonal with respect to the weighted inner product with two discrete points[1]

M. G. Magomed-Kasumov (Makhachkala, Russia)
rasuldev@gmail.com

Representations for functions from systems, orthogonal with respect to a discrete-continuous weighted Sobolev-type inner product with two discrete points, are obtained in terms of functions orthogonal with respect to classical inner products.

Keywords: weighted inner product, Sobolev-type inner product, discrete-continuous inner product.

Введение

В работах Шарапудинова И.И. (см. [1, 2] и приведенные там списки литературы) исследуются свойства систем функций, ортогональных относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)w(t)dt, \tag{1}$$

и рядов Фурье по ним. Одно из замечательных свойств частичных сумм рядов Фурье $S_{r,n}(f)$ по таким системам заключается в том, они r-кратно совпадают с функцией f в точке a. Указанное свойство делает эти ряды удобным инструментом для приближенного решения спектральными методами задачи Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения [3, 4]. Однако для решения двухточечных краевых задач упомянутого свойства совпадения в начале отрезка уже недостаточно: в этом случае хотелось бы совпадения частичных сумм с приближаемой функцией на обоих концах рассматриваемого отрезка. В связи с этим возникает задача об изучении систем функций, ортогональных относительно скалярного произведения с двумя дискретными точками:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1}\Big(f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + f^{(\nu)}(b)g^{(\nu)}(b)\Big) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)w(t)dt. \quad (2)$$

Основной целью данной работы является получение представлений для функций из систем $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}$, ортонормированных относительно (2) при $r = 1$, в терминах функций, ортогональных относительно классических скалярных произведений. Мы будем считать одну из функций системы Φ_1 равной константе (в рамках данной работы без потери общности можно считать, что константой является $\varphi_{1,0}(t)$). Без требования, связанного с константой, получение содержательных результатов становится гораздо более сложной задачей. С другой стороны, это требование является довольно естественным, поскольку известные ортогональные системы, как правило, включают в себя константу. Отметим, что указанная задача в безвесовом случае рассматривалась в работе [5].

Основные результаты

Обозначим через $W^1_{L^2_w} = W^1_{L^2_w}[a, b]$ пространство Соболева, состоящее из абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций f, таких что $f' \in L^2_w[a, b]$, где $L^2_w = L^2_w[a, b]$ — пространство Лебега с весовой (неотрицательной, почти всюду положительной и измеримой) функцией w:

$$L^2_w[a, b] = \{f : \int_a^b |f(t)|^2 w(t)dt < \infty\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что формула (2) при $r = 1$

$$\langle f, g\rangle_S = f(a)g(a) + f(b)g(b) + \int_a^b f'(t)g'(t)w(t)dt \quad (3)$$

задает скалярное произведение в пространстве $W^1_{L^2_w}$. Через $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}$ будем обозначать систему функций из $W^1_{L^2_w}$.

Предложение 1. *Если* $\varphi_{1,0}(t) \equiv const$, *то* Φ_1 *будет ортогональной системой тогда и только тогда, когда*

$$\varphi_{1,k}(a) + \varphi_{1,k}(b) = 0, k \geq 1, \tag{4}$$

$$2\varphi_{1,k}(a)\varphi_{1,n}(a) + \int_a^b \varphi'_{1,k}(t)\varphi'_{1,n}(t)w(t)dt = 0, k, n \geq 1, k \neq n. \tag{5}$$

Предложение 2. *Обозначим через* Φ *систему функций* $\{\varphi_k(x) = \varphi'_{1,k+1}(x)\}_{k=0}^{\infty}$. *Тогда выполнение любых двух из следующих условий влечет выполнение и третьего:*

- *Level 0 Item 0 система функций* Φ *ортогональна в* L^2_w;
- *Level 0 Item 1 система функций* Φ_1 *ортогональна относительно* (3);
- *Level 0 Item 2 функции* $\varphi_{1,k}$, $k \geq 1$, *удовлетворяют условиям:*

$$\varphi_{1,1}(a) + \varphi_{1,1}(b) = 0, \tag{6}$$

$$\varphi_{1,k}(a) = \varphi_{1,k}(b) = 0, k \geq 2. \tag{7}$$

Предложение 3. *Пусть* $\varphi_k(x) = \varphi'_{1,k+1}(x)$, $k \geq 0$. *Тогда выполнение любых двух из следующих условий влечет выполнение и третьего:*

- *Level 0 Item 0 функция* $\varphi_k(x)$ *нормирована в* $L^2_w[a, b]$;
- *Level 0 Item 1 функция* $\varphi_{1,k+1}(x)$ *нормирована относительно* (3);
- *Level 0 Item 2 на концах отрезка функция* $\varphi_{1,k+1}(x)$ *обращается в ноль:*

$$\varphi_{1,k+1}(a) = \varphi_{1,k+1}(b) = 0. \tag{8}$$

Теорема 4. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_k\}$ — *система функций, удовлетворяющая условию*

$$\int_a^b \varphi_k(t)u(t)dt = 0, k \geq 1. \tag{9}$$

Тогда ортонормированность в L^2_u *системы* $\Phi = \{\varphi_k\}$ *равносильна ортонормированности в* $W^1_{L^2_\rho}$, $\rho(x) = \frac{1}{u(x)}$, *системы функций* $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}$, *заданной равенствами*

$$\varphi_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi_{1,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}J_0^2}}\Big(-\frac{1}{2}J_0 + \int_a^x \varphi_0(t)u(t)dt\Big), J_0 = \int_a^b \varphi_0(t)u(t)dt,$$

$$\varphi_{1,k+1}(x) = \int_a^x \varphi_k(t)u(t)dt, \quad k \geq 1.$$

Теорема 5. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_k\} \subset L^2_\rho$ *— ортонормированная система функций, обладающая свойством*

$$\int_a^b \varphi_k(t)dt = 0, k \geq m. \tag{10}$$

Тогда система функций $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}$*, в которой* $\varphi_{1,k}$*,* $0 \leq k \leq m$*, получены ортогонализацией системы функций*

$$1, \int_a^x \varphi_k(t)dt, \quad 0 \leq k \leq m-1, \tag{11}$$

и

$$\varphi_{1,k}(x) = \int_a^x \varphi_{k-1}(t)dt, \quad k \geq m+1, \tag{12}$$

будет ортонормированной в $W^1_{L^2_\rho}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы функций и некоторые их приложения // УМН. 2019. Т. 74, № 4(448). С. 87–164.

[2] *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, № 1. С. 225–258.

[3] *Шарапудинов И. И.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышёва первого рода, и задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 12. С. 1645–1662.

[4] *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы функций и задача Коши для ОДУ // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83, № 2. С. 204–226.

[5] *Магомед-Касумов М. Г.* Соболевские системы, ортогональные относительно скалярного произведения с двумя дискретными точками, и ряды Фурье по ним // Изв. Вузов. 2021. № 12. С. 56–66.