УДК 517.5

О p-адических жестких вейвлет фреймах[1]

С. Ф. Лукомский, А. М. Водолазов (Саратов, Россия)
LukomskiiSF@info.sgu.ru, vam21@yandex.ru

Предлагается способ построения жестких вейвлет фреймов в произвольной нульмерной группе по известной масштабирующей функции. В качестве группы можно выбирать аддитивную группу поля p-адических чисел, аддитивную группу поля положительной характеристики, группу Виленкина. Предлагаемый метод не использует принцип унитарного расширения. Приведен пример построения жесткого фрейма в группе 2-адических чисел.

Ключевые слова: вейвлет фреймы, нульмерные группы, p-адические числа.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

On p-adic tight wavelet frames[1]

S. F. Lukomskii, A. M. Vodolazov (Saratov, Russia)
LukomskiiSF@info.sgu.ru, vam21@yandex.ru

We propose a method for constructing tight wavelet frames in an arbitrary zero-dimensional group from a known scaling function. As a group, one can choose the additive group of the field of p -adic numbers, the additive group of the field of positive characteristic, or the Vilenkin group. The proposed method does not use the principle of unitary expansion. An example of constructing a tight wavelet frame in the group of 2-adic numbers is given.

Keywords: tight wavelet frame, zero-dimensional group, p-adic numbers.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

Введение

В работах [2-4] разработаны методы построения жестких вейвлет фреймов в группах Виленкина и полях положительной характеристики. Для этого авторы использовали принцип унитарнрго расширения. В [1] указан способ построения фреймов в поле p-адических чисел, но нет даже примеров жестких фреймов. Мы предлагаем способ построения жестких вейвлет фреймов в любой нульмерной группе, по известной масштабирующей функции. Этот спсоб позволяет достаточно прсто строить жесткие вейвлет фреймы и в поле p-адических чисел. Предлагаемый способ не использует принцип унитарного расширения.

1. Нульмерные группы и их характеры

Пусть G-локально компактная нульмерная группа с основной цепочкой подгрупп $\cdots \supset G_{-n} \supset \cdots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$, порядок фактор групп $\sharp G_n/G_{n+1} = p$ - простое число, $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ -базисная последовательность.
$H_0 = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+} \dots \dot{+}a_{-s}g_{-s}, s \in \mathbb{N},\ a_j = \overline{0, p-1}\}$, множество сдвигов. Оператор $\mathcal{A}\colon G \to G$, определенный равенством, $\mathcal{A}x := \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$, при $x = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \in G$ - оператор растяжения в G, $\mathcal{A}g_n = g_{n-1}, \mathcal{A}G_n = G_{n-1}$.

Пусть далее X –группа характеров, $G_n^\perp = \{\chi \in X : \forall\, x \in G_n\ , \chi(x) = 1\}$ аннуляторы, $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ – функции Радемахера. Оператор растяжения в X определяется равенством $(\chi\mathcal{A}, x) := (\chi, \mathcal{A}x)$.

При $M, N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ множество функций $f \in L_2(G)$ таких, что 1) $\operatorname{supp} f \subset G_{-N}$, и 2) f постоянна на смежных классах $G_M\dot{+}g$. Класс $\mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_M^\perp)$ определяется аналогично.

Лемма 1. *Для любых фиксированных* $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_s = 0, 1, ..., p-1$ *множество* H_0 *есть ортонормированный базис в* $L_2(G_0^\perp r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1} ... r_s^{\alpha_s})$.

Лемма 2. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$. *Для любых фиксированных* $\alpha_u ... \alpha_0 \alpha_{-1}, ..., \alpha_{-s} = \overline{0, p-1}$ *семейство* $p^{\frac{s}{2}}\mathcal{A}^s H_0$ *есть ортонормированный базис в* $L_2(G_{-s}^\perp r_{-s}^{\alpha_{-s}} ... r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} ... r_u^{\alpha_u})$.

Пусть функцию $\varphi \in L_2(G)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению , $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$, с маской $m_0(\chi) = \sum\limits_{h \in H_0} \beta_h \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)}$.

Лемма 3. *Если масштабирующая функция* $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N}),\ M, N \in \mathbb{N}$, *то масштабирующее уравнение имеет вид*

$$\varphi(x) = p \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h).$$

2. Построение жестких фреймов без принципа унитарного расширения

Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$, т.е. $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_M^\perp)$. Маска

$$m_0(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{(\chi, A^{-1}h)}$$

постоянна на смежных классах по подгруппе $G_{-N}^\perp$.

Лемма 4. *Пусть маски m_j $(j = 1, ..., q)$ удовлетворяют условиям*

$$\hat{\psi}^{(j)}(\chi) = \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) m_j(\chi) = 1$$

на смежных классах

$$G_{-s}^{\perp} r_{-s}^{\gamma_{-s}} ... r_{-1}^{\gamma_{-1}} r_0^{\gamma_0} ... r_u^{\gamma_u}, \quad s = s(j).$$

Тогда

$$\sum_{h \in H_0} |c_{n,h}^{(j)}(f)|^2 = \sum_{h \in H_0} |(\psi_{n,h}^{(j)}, f)|^2 = \int_{G_{n-s}^{\perp} r_{n-s}^{\gamma_{-s}} ... r_{n-1}^{\gamma_{-1}} r_{n-0}^{\gamma_0}} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi).$$

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^{\perp}}(G_M^{\perp})$ масштабирующая функция с маской m_0. Определим маски $m_j : j = 1, 2, ..., q$ так, что*
1)$\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) m_j(\chi) = \mathbf{1}_{E_j}(\chi)$, где $E_j = G_{-s(j)}^{\perp} r_{-s(j)}^{\alpha_{-s(j)}} r_{-s(j)+1}^{\alpha_{-s(j)+1}} ... r_0^{\alpha_0} ... r_M^{\alpha_M}$ дизъюнктные смежные классы, и $E_j \mathcal{A}^t$ дизъюнктные множества.
2)существуют целые числа $t(j)$, такие, что

$$\bigsqcup_j E_j \mathcal{A}^{t(j)} = G_{M+1}^{\perp} \setminus G_M^{\perp}.$$

Тогда функции $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_q$ порождают жесткий фрейм.

Доказательство теоремы основано на леммах 1-4.
Пример.(2-adic фрейм) Операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию $pg_n = g_{n+1}$. Рассмотрим простейший случай: $p = 2, M = N = 1$ т.е. $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{G_{-1}^{\perp}}(G_1^{\perp})$ Маску $m_0(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(2)}} \beta_h \overline{(\chi, A^{-1}h)}$, ищем такую, что $m_0(\chi) m_0(\chi \mathcal{A}^{-1}) = 0$ на $G_2^{\perp} \setminus G_1^{\perp}$. Обозначим $m = \alpha_{-1} + \alpha_0 p + \alpha_1 p^2, \quad n = a_{-1} + a_{-2} p$,

$$\overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} = (G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1}, a_{-1} g_0 \dot{+} a_{-2} g_{-1}\dot{)} = A_{m,n},$$

$$A_{m,n} = e^{2\pi i (\alpha_{-1} + \alpha_0 p^{-1} + \alpha_1 p^{-2})(a_{-1} + \frac{a_{-2}}{p})}, \quad m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1}) = \lambda_m$$

$$A = (A_{m,n})_{m=\overline{0,7}, n=\overline{0,3}}, \quad B = (\beta_0, ..., \beta_3)^T, \ \Lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_7)^T.$$

Для нахождения маски m_0 имеем систему

$$AB = \Lambda. \tag{1}$$

Решение системы ищем такое, чтобы $m_0(\chi)m_0(\chi\mathcal{A}^{-1}) = 0$ на $G_2^\perp \setminus G_1^\perp$. Полагаем $\lambda_0 = 1, \lambda_2 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$, решаем систему

$$\begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & A_{0,3} \\ A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{6,0} & A_{6,1} & A_{6,2} & A_{6,3} \\ A_{7,0} & A_{7,1} & A_{7,2} & A_{7,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и находим $\beta_0 = \frac{1}{2}, \beta_1 = \frac{i}{2}, \beta_2 = \frac{-i}{2}, \beta_3 = \frac{1}{2}$. Подставляя их в систему (1) находим $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i, \lambda_4 = 1 + e^{\frac{3\pi i}{4}}, \lambda_5 = 1$. Полагаем
$m_1(\chi) = \frac{1}{1+i}\mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_0}(\chi), \quad \hat{\psi}^{(1)}(\chi) = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})m_1(\chi)$,
$m_2(\chi) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{G_0^\perp r_0 r_1}(\chi), \quad \hat{\psi}^{(2)}(\chi) = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})m_2(\chi)$.

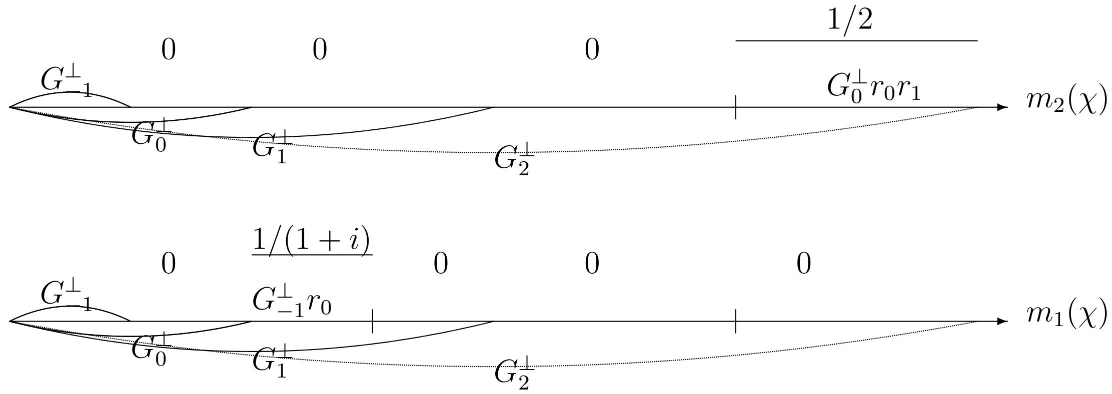

Рис.1. Графики масок m_2 и m_1.

Восстанавливаем
$\psi^{(1)}(x) = \int\limits_X \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_0}(\chi, x)d\nu(x) = 2r_0(x)\mathbf{1}_{G_{-1}}(x)$
$\psi^{(2)}(x) = \int\limits_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0 r_1}(\chi, x)d\nu(x) = r_0(x)r_1(x)\mathbf{1}_{G_0}(x)$

Так как $G_{-1}^\perp r_0\mathcal{A} \bigsqcup G_0^\perp r_0 r_1 = (G_2^\perp \setminus G_1^\perp)$, то функции $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ порождают жесткий фрейм. Графики масок приведены на рисунке 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames // J. Fourier Anal Appl. 2010. Vol. 16, № 5. P. 693–714.

[2] *Shah F. A., Debnaht L.* Tightwavelet frames on local fields// Analysis. 2013. Vol. 33. P. 293–307.

[3] *Farkov Y., Lebedeva E., Skopina M.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Iternational Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2015. Vol. 13, № 5. 1550036 (19 pages).

[4] *Ahmada O., Bhatb M. Y., Sheikha N. A.* Construction of Parseval Framelets Associated with GMRA on Local Fields of Positive Characteristic // Num Func. Anal. and Optim. 2021. Vol. 42, № 3. P. 344–370.