УДК 517.956.32

Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения[1]

И. С. Ломов (Москва, Россия)
lomov@cs.msu.ru

Приведен алгоритм построения быстро сходящегося ряда, представляющего собой обобщенное или классическое решение смешанной задачи для телеграфного уравнения, рассматриваемого в полуполосе. Рассмотрен случай существенно несамосопряженного оператора по пространственной переменной. Построенный ряд представляет собой обобщенную формулу Даламбера.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, смешанная задача, метод Фурье, несамосопряженный оператор.

Effective application of the Fourier method to solving a mixed problem for the telegraph equation[1]

I. S. Lomov (Moscow, Russia)
lomov@cs.msu.ru

An algorithm for constructing a rapidly converging series is presented, which is a generalized or classical solution of a mixed problem for the telegraph equation considered in a half-strip. The case of an essentially non-self-adjoint operator with respect to the spatial variable is considered. The constructed series is a generalized d'Alembert formula.

Keywords: telegraph equation, mixed problem, Fourier method, non-self-adjoint operator.

Рассмотрим смешанную задачу для телеграфного уравнения

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t), \quad (x,t) \in Q = (0,1) \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

$q(x)$, $\varphi(x)$ — комплекснозначные, интегрируемые на $(0,1)$ функции.

Обозначим через $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ — резольвенту оператора L_0 : $-y''(x)$, $x \in (0,1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = y'(1)$; $\lambda = \varrho^2$, $Re\,\varrho \geq 0$, E — единичный оператор. Пусть $y = R^0_\lambda g$, тогда y является решением задачи

$$-y''(x) - \varrho^2 y(x) = g(x),\ x \in (0,1),\ y(0) = 0,\ y'(0) = y'(1).$$

Решив эту задачу, получим

$$R_\lambda^0 g(x) = -\frac{\sin \varrho x}{2\varrho \sin^2 \frac{\varrho}{2}} \int\limits_0^1 \cos \varrho(1-t) g(t) dt - \frac{1}{\varrho} \int\limits_0^x \sin \varrho(x-t) g(t) dt. \quad (4)$$

Решение задачи (1)–(3) при $q(x) = 0$ по методу Фурье запишем в виде

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 0} \int\limits_{\gamma_n} (R_\lambda^0 \varphi) \cos \varrho t d\lambda, \quad (5)$$

где $\lambda = \varrho^2$, $Re\, \varrho \geq 0$, γ_n — образ в λ-плоскости окружности $\widetilde{\gamma}_n = \{\varrho : |\varrho - 2\pi n| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, так что внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L_0.

Подставив (4) в (5) и применив теорему о вычетах, получим

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\Big[2(x+t)(1,\varphi) + 4\sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi n(x+t) +$$

$$+(\varphi, \cos 2\pi n\tau)(x+t)\cos 2\pi n(x+t)] +$$

$$+2(x-t)(1,\varphi) + 4\sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi n(x-t) +$$

$$+(\varphi, \cos 2\pi n\tau)(x-t)\cos 2\pi n(x-t)]\Big] = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)],$$

последнее равенство объясняется тем, что функция $\widetilde{\varphi}(x)$ имеет следующее разложение по рассматриваемой системе корневых функций: $\widetilde{\varphi}(x) = 2x(1,\varphi) + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(\varphi,(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi n x + (\varphi,\cos 2\pi n\tau) x \cos 2\pi n x]$.

Подставим $u_0(x,t) = \dfrac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)]$ в краевые условия (2). Получим два соотношения: $\widetilde{\varphi}(x) = -\widetilde{\varphi}(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, т. е. функция $\widetilde{\varphi}(x)$ — нечетная, и

$$\widetilde{\varphi}'(1+x) = 2\widetilde{\varphi}'(x) - \widetilde{\varphi}'(1-x),\ x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где учтено, что $\widetilde{\varphi}'(x)$ — четная функция.

Проинтегрировав равенство (6) по отрезку $[0,x]$, получим

$$\widetilde{\varphi}(1+x) = 2\widetilde{\varphi}(x) + \widetilde{\varphi}(1-x),\ x \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

Соотношение (7) позволяет продолжить функцию $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $x \in [0,1]$, с отрезка $[0,1]$ на полуось $x > 0$.

Обозначим $Q_T = (0,1) \times (0,T)$ для произвольного фиксированного числа $T > 0$.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало единственное классическое решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3), необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$ и $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = \varphi'(1)$. Это решение дается формулой*

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t), \tag{8}$$

где

$$a_0(x,t) = u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)],$$

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)d\eta, \quad n = 1,2,\ldots,$$

$\widetilde{\varphi}(x)$ есть нечетное продолжение функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$, определяемое соотношением (7), $\widetilde{f}_n(\eta,\tau) = f_n(\eta,\tau) = -q(\eta)a_n(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$, $n = 0,1,\ldots$, $f_n(\eta,\tau)$ продолжается по переменной η с $[0,1]$ на всю прямую так же, как функция $\varphi(x)$, $\widetilde{f}_n(\eta,\tau) = -\widetilde{q(\eta)a_n}(\eta,\tau)$.

Формулу (8) можно назвать обобщенной формулой Даламбера.

Теорема 2. *Если $\varphi \in \mathcal{L}(0,1)$, то ряд $A(x,t)$ (8) сходится абсолютно и равномерно (с экспоненциальной скоростью) в Q_T для любого $T > 0$.*

Теорема 3. *Если $\varphi \in \mathcal{L}(0,1)$, а функции $\varphi_h(x)$, $h = 1,2,\ldots$, удовлетворяют условиям теоремы 1 и $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ при $h \to \infty$, то соответствующие функциям $\varphi_h(x)$ классические решения $u_h(x,t)$ задачи (1)–(3) сходятся по норме $\mathcal{L}(Q_T)$ к $A(x,t)$, т.е. в этом случае ряд (8) является обобщенным решением задачи (1)–(3).*

Таким образом, из теорем 1–3 следует, что один и тот же ряд $A(x,t)$, быстро сходящийся, является классическим или обобщенным решением задачи (1)–(3) в зависимости от гладкости функции $\varphi(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 2. С. 268–300.

[2] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й межд. Саратовской зимн. шк. (Саратов, 28 января – 1 февраля 2020 г.). Саратов : Изд-во "Научная книга 2020. С. 433–439.