УДК 517.5

Слабо лакунарные ортогональные системы[1]

И. В. Лимонова (Москва, Россия)
limonova_irina@rambler.ru

Для конечной ортогональной системы равномерно ограниченных функций установлено существование достаточно плотных подсистем со свойством лакунарности и с хорошей оценкой нормы оператора мажоранты частных сумм. Доклад основан на совместной работе с Б.С. Кашиным.

Ключевые слова: подсистема, свойство лакунарности, оператор мажоранты частных сумм.

Благодарности: работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ (проект № 14.W03.31.0031).

Weakly lacunary orthogonal systems[1]

I. V. Limonova (Moscow, Russia)
limonova_irina@rambler.ru

For a finite orthogonal system of uniformly bounded functions, we establish the existence of sufficiently dense subsystems with the lacunarity property and a good norm estimate for the maximal partial sum operator. The talk is based on the joint work with B. S. Kashin.

Keywords: subsystem, lacunarity property, maximal partial sum operator.

Acknowledgements: this work was supported by a grant of the Government of the Russian Federation (project no. 14.W03.31.0031).

Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система функций (О.Н.С.), заданных на вероятностном пространстве (X, μ). Система Φ называется p–лакунарной ($p > 2$) или S_p–системой, если для некоторой постоянной K и любого полинома $P = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \varphi_k$ по системе Φ справедливо неравенство

$$\|P\|_{L^p} \le K \|P\|_{L^2}. \tag{1}$$

Естественный вопрос о максимальной плотности S_p–подсистем в данной О.Н.С. оказался весьма сложным. Он оставался открытым даже в случае тригонометрической системы до появления прорывной работы [1] Ж.Бургейна, в которой была установлена

Теорема A. *Пусть $p > 2$ и О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$ такова, что*

$$\|\varphi_k\|_{L^\infty} \le M, \; k = 1, 2, \ldots, N.$$

Тогда найдётся множество $\Lambda \subset \langle N \rangle$ такое, что $|\Lambda| \geq N^{2/p}$ и для любого полинома $P = \sum_{k\in\Lambda} a_k\varphi_k$ имеет место оценка (1) с $K = K(M,p)$. Здесь и далее $\langle N \rangle$ обозначает множество чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$.

Пусть $\Lambda \subset \langle N \rangle$ и S_Λ — оператор, действующий по правилу $S_\Lambda(\{a_k\}_{k\in\Lambda}) = \sum\limits_{k\in\Lambda} a_k\varphi_k(x)$. Ясно, что для множества Λ, существование которого установлено в Теореме А,

$$\|S_\Lambda : l^\infty(\Lambda) \to L^p(X)\| \leq |\Lambda|^{1/2} \cdot K(M,p). \tag{2}$$

Введём пространство Орлича L_{ψ_α}, где

$$\psi_\alpha(t) = t^2 \frac{\ln^\alpha(e + |t|)}{\ln^\alpha(e + 1/|t|)},\ \alpha > 0, \tag{3}$$

а норма функции $f \in L_{\psi_\alpha}(X)$ определяется по формуле

$$\|f\|_{\psi_\alpha} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_X \psi_\alpha\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right) d\mu \leq 1\right\}.$$

В работе [2] установлены аналоги оценки (2) для пространств Орлича L_{ψ_α} для произвольных ортогональных систем с равномерно ограниченными элементами. Естественно, что в этом случае можно гарантировать большую, чем в Теореме А, плотность множества Λ. Однако для пространства Орлича, порождённого функцией (3), нельзя ожидать, что случайная подсистема мощности $\geq N/(\log N)^\beta$ (β — сколь угодно большая постоянная) окажется ψ_α–лакунарной. Поэтому естественно искать подсистемы $\Phi_\Lambda := \{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$, для которых справедлив аналог более слабого, чем p–лакунарность, свойства (2). Доказательство результатов из работы [2] основано на некоторой модификации метода Бургейна [1].

Ниже нам удобнее рассматривать ортогональные (не обязательно нормированные в $L^2(X,\mu)$) системы со свойством

$$\|\varphi_k\|_{L^\infty(X)} \leqslant 1,\ k = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

Пусть $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^N$ — набор независимых случайных величин, принимающих значения 0 и 1 (селекторов), заданных на вероятностном пространстве (Ω, ν) с

$$\mathbb{E}\xi_i = \int\limits_\Omega \xi_i(\omega) d\nu = \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Для $\omega \in \Omega$ будем обозначать

$$\Lambda_\omega = \{i \in \langle N \rangle : \xi_i(\omega) = 1\}\,.$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$ и $\rho > 0$ фиксированы. Для произвольной ортогональной системы $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ со свойством*

$$\|\varphi_k\|_{L^\infty(X)} \leqslant 1,\ k = 1, 2, \ldots, N.$$

с вероятностью большей $1 - C(\rho)N^{-9}$ для случайного множества $\Lambda = \Lambda_\omega$, порождённого набором $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^N$ с $\mathbb{E}\xi_i = \delta = \big(\log(N+3)\big)^{-\rho}$, $1 \le i \le N$, имеет место неравенство

$$\|S_\Lambda : l^\infty(\Lambda) \to L_{\psi_\alpha}(X)\| \le K(\alpha,\rho)|\Lambda|^{1/2}\left(\big(\log(N+3)\big)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{\rho}{4}} + 1\right).$$

Следствие. *При $\delta = \big(\log(N+3)\big)^{-2\alpha}$ норма оператора $S_\Lambda \cdot |\Lambda|^{-1/2}$, действующего из $l^\infty(\Lambda)$ в $L_{\psi_\alpha}(X)$, с вероятностью близкой к 1 ограничена величиной, не зависящей от N.*

Максимальный оператор S^*_Φ (или, что то же, оператор мажоранты частных сумм) задаётся соотношением: для $\{a_k\}_{k=1}^N \in \mathbb{R}^N$

$$S^*_\Phi(\{a_k\})(x) = \sup_{1 \le M \le N}\left|\sum_{k=1}^M a_k\varphi_k(x)\right|.$$

Теорема 2. *При $\rho > 4$ для любой ортогональной системы $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ со свойством (4) найдётся $\Lambda \subset \langle N \rangle$, мощности $|\Lambda| \ge N\big(\log(N+3)\big)^{-\rho}$, такое, что*

$$\left\|S^*_{\Phi_\Lambda} : l^\infty(\Lambda) \to L^2(X)\right\| \le C(\rho)|\Lambda|^{1/2}. \tag{5}$$

Замечание. Существует ортогональная система, основанная на матрице Гильберта (см. [3], гл. 9), со свойством (4), для которой выполнение оценки (5) для $\Lambda \subset \langle N \rangle$ возможно только при $|\Lambda| \le N\big(\log(N+3)\big)^{-2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bourgain J.* Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$–set problem // Acta Math. 1989. Vol. 162. P. 227–245.

[2] *Кашин Б. С., Лимонова И. В.* Слабо лакунарные ортогональные системы и свойства оператора мажоранты частных сумм для подсистем // Тр. МИАН. 2020. Т. 311. С. 164—182.

[3] *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : 2−е изд. доп. АФЦ, 1999.