УДК 519.633

# Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом[1]

**В. П. Курдюмов (Саратов, Россия)**
Kurdyumov47@yandex.ru

Для смешанной задачи с суммируемым потенциалом в волновом уравнении с нулевым начальным положением, когда одно из граничных условий не содержит производных, исследуются свойства формального решения по методу Фурье в зависимости от гладкости начальной скорости.

*Ключевые слова:* метод Фурье, формальное решение, волновое уравнение, резольвента.

# Classic and generalized solutions of the mixed problem for wave equation with a summable potential[1]

**V. P. Kurdumov (Saratov, Russia)**
Kurdyumov47@yandex.ru

The mixed problem for wave equation with a summable potential and zero initial position, containing no derivatives in one of its boundary conditions, is studied. The properties of its formal solution by Fourier method, depending on smoothness of initial velocity, are established.

*Keywords:* Fourier method, formal solution, wave equation, resolvent.

## Введение

Рассматривается смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0,\ u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \tag{3}$$

где $q(x) \in L[0,1],\ q(x)$ и $\psi(x)$ - комплекснозначные функции, $\alpha,\ \beta, \alpha_1,\ \beta_1$ - комплексные числа.

К задаче (1) - (3) по методу Фурье привлекается оператор Штурма-Лиувиля $L:\ Ly = -y'' + q(x)y$ с регулярными при $1+\alpha\beta \neq 0$ граничными условиями

$$y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = \alpha y(0) + y(1) = 0,$$

который охватывает все линейные двухточечные разнопорядковые граничные условия. Он выделяется тем, что в силу асимптотических формул его собственных значений

$$
\begin{gathered}
\lambda_n = \rho_n^2,\ \lambda_n' = \rho_n'^2\ (\lambda = \rho^2,\ \mathrm{Re}\rho \geqslant 0), \\
\rho_n = 2n\pi + b_1 + o(1),\ \rho_n' = 2n\pi + b_2 + o(1),
\end{gathered} \tag{4}
$$

только в нем при $b_1 = b_2$ возможно наличие бесконечного множества кратных собственных значений и им соответствующих собственных функций. Один из таких наиболее трудных случаев и рассматривается в статье.

Считаем, что в задаче (1)-(3) $\alpha = 0,\ \beta = -1$, т.е. в дальнейшем рассматривается такая задача

$$
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{5}
$$

$$
u(x,0) = 0,\ u_t'(x,0) = \psi(x), \tag{6}
$$

$$
u_x'(0,t) - u_x'(1,t) + \alpha_1(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0,\ u(1,t) = 0. \tag{7}
$$

Исследование проводится методом Фурье с помощью резольвентного подхода и идеи А.Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье. Такой подход в [1] для задачи (1), (3) с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x),\ u_t'(x,0) = 0$ позволил получить классическое решение без завышения гладкости $\varphi(x)$; и с привлечением теорем Карлесона и Ханта о сходимости тригонометрических рядов Фурье почти всюду (п.в.) показать, что формальное решение сходится п.в. для $\varphi(x) \in L_p[0,1],\ p > 1$, а его сумма является обобщенным решением. Аналогичные результаты для задачи (1), (2) с граничными условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0$ или $u_x'(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u_x'(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0$ получены в [2], [3].

Мы получим классическое решение задачи (5)-(2) при условии, что $\psi(x)$ абсолютно непрерывна и $\psi'(x) \in L_p[0,1],\ 1 < p \leqslant 2$. А также покажем, что в случае $\psi(x) \in L[0,1]$ ряд формального решения сходится равномерно при $x \in [0,1],\ t \in [0,T]$ и является обобщенным решением, а если $\psi(x) \in L_p[0,1],\ 1 < p \leqslant 2$, то обобщенное решение является значительно более гладким.

## Классическое решение.

Берем $\psi(x)$ такую, что $\psi(1) = 0$ и для простоты считаем, что $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$. Оператор Штурма-Лиувиля имеет вид

$$
Ly = -y'' + q(x)y,\ y'(0) - y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = y(1) = 0.
$$

Для его собственных значений справедливы формулы (4), где $b_1 = b_2$, т.е. $\lambda_n = \rho_n^2$, $\lambda'_n = \rho_n'^2$, $\rho_n = 2n\pi + b + o(1)$, $\rho'_n = 2n\pi + b + o(1)$. Обозначим $\widetilde{\gamma_n} = \{\rho | \, |\rho - 2n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geqslant n_0$ и $n_0$ таково, что при $n \geqslant n_0$ внутри $\widetilde{\gamma_n}$ находятся по одному $\rho_n$ и $\rho'_n$ (которые могут и совпадать). Пусть $\gamma_n$ - образ $\widetilde{\gamma_n}$ в $\lambda$ - плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Re}\rho \geqslant 0$). Формальное решение задачи (5)-(2) берем в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\right)(R_\lambda \psi)\,\frac{sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

где $r > 0$ таково, что внутри $|\lambda| = r$ находятся все собственные значения $\lambda_n$ и $\lambda'_n$, для котрых $n < n_0$, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора $L$.

Представим $\psi(x)$ в виде $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$, где $\psi_1(x) \in W_2^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (область определения оператора $L$). Формальное решение представим так

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{4} u_j(x,t), \text{ где}$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda^0 \psi_1\right)\frac{sin\rho t}{\rho}d\lambda, \tag{8}$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0 \psi_1\right)\frac{sin\rho t}{\rho}d\lambda, \tag{9}$$

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda - \mu_0}\left(R_\lambda^0 g\right)\frac{sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_4(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda - \mu_0}\left(R_\lambda g - R_\lambda^0 g\right)\frac{sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$R_\lambda^0$ - резольвента оператора $L_0$ : $L_0 y = -y''$, $y'(0) - y'(1) = 0$, $y(1) = 0$; $\mu_0$ находится вне контуров $|\lambda| = r$ и $\gamma_n$ при $n \geqslant n_0$, $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$.

**Теорема 1.** *Если $q(x) \in L[0,1]$ и $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$, то сумма ряда формального решения задачи (5)-(2) непрерывно дифференцируема по $x$ и $t$ и удовлетворяет условиям (6), (2); $u'_x(x,t)$ ($u'_t(x,t)$) абсолютно непрерывна по $x$ (по $t$) и п.в. удовлетворяется уравнение (5).*

## Обобщенное решение.

Пусть $\psi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение берем в виде $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, где $u_j(x,t)$ - те же, что и в (8),(9), но с функцией $\psi(x)$ вместо $\psi_1(x)$. Пусть $\psi_h(x) \in W_2^1[0,1]$ и $u_h(x,t)$ - решение задачи (5)-(2) с функцией $\psi_h(x)$ вместо $\psi(x)$, даваемое теоремой 1.

**Теорема 2.** *Если $q(x)$ и $\psi(x) \in L[0,1]$, то ряд $u(x,t)$ формального решения задачи* (5)-(2) *сходится равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ и $u(x,0) = 0$. Более того, если $\| \psi_h - \psi \|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то решение $u_h(x,t)$ задачи* (5)-(2) *сходится к $u(x,t)$ равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$.*

Если же $\psi(x) \in L_p[0,1],\ 1 < p \leqslant 2$, то имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.** *Если $q(x) \in L[0,1]$, $\psi(x) \in L_p[0,1],\ 1 < p \leqslant 2$, то сумма ряда формального решения задачи* (5)-(2) *абсолютно непрерывна по $x$, $t$ и удовлетворяет условиям $u(x,0) = 0$, $u(1,t) = 0$; п.в. по $x \in [0,1]$ $u'_t(x,0) = \psi(x)$ и п.в. на $[0,\infty)$ выполняются условия $u'_x(0,t) - u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0$, $u'_t(x,0) = \psi(x)$.*

*Более того, если $\| \psi_h - \psi \|_p \to 0$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ при любом $T > 0$.*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом в случае двухточечных граничных условий разных порядков // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 505–515.

[2] *Хромов А. П.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1805. https://doi.org/10.7868/S0044466916100112

[3] *Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения сненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 444–456. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456