

Экстремальные задачи на классах голоморфных отображений круга в себя¹

О. С. Кудрявцева (Волгоград, Россия),

А. П. Солодов (Москва, Россия)

kudryavceva_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

Найдены точные области однолиственности и обратимости на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками и условием на угловую производную в граничной неподвижной точке.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, экстремальные задачи.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00584).

Extremal problems on classes of holomorphic self-maps of a disc¹

O. S. Kudryavtseva (Volgograd, Russia),

A. P. Solodov (Moscow, Russia)

kudryavceva_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

Sharp domains of univalence and invertibility on classes of holomorphic self-maps of the unit disc with an interior and a boundary fixed points, with a restriction on the value of the angular derivative at the boundary fixed point are found.

Keywords: holomorphic map, fixed points, angular derivative, extremal problems.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00584).

В работе изучаются задачи поиска областей однолиственности и обратимости на классах голоморфных отображений круга в себя.

Рассматривая класс ограниченных фиксированной постоянной голоморфных отображений f единичного круга с центром в нуле с внутренней неподвижной точкой $z = 0$ и таких, что $f'(0) = 1$, Ландау [1] установил существование единого круга однолиственности на этом классе и точно вычислил его радиус. Кроме того, он обнаружил существование круга, в котором все функции из указанного класса обратимы, точно вычислив и его радиус.

Горяйнов [2], изучая влияние угловой производной на поведение функции внутри круга, выделил область однолиственности на классе голоморфных функций f , отображающих единичный круг с центром в нуле в

¹Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

¹This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

себя, со свойствами $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f'(1) \leq \alpha$. Вопрос о нахождении наилучшаемых областей однолистности оставался открытым.

В настоящей работе решены задачи поиска точных областей однолистности и обратимости на классах голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками и ограничением на значение угловой производной в граничной неподвижной точке.

Теорема 1. Пусть $\alpha \in (1, 4]$. Если f — голоморфная функция, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f'(1) \leq \alpha$ (в смысле углового предела), тогда f однолиственна в области

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}: |z| < 1 \text{ и } \frac{|1 - 2z + |z|^2|}{1 - |z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} \right\}.$$

Какова бы ни была область \mathcal{U} , содержащаяся в единичном круге с центром в нуле, $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \neq \mathcal{D}$, найдется голоморфная функция f , отображающая единичный круг с центром в нуле в себя, со свойствами $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f'(1) \leq \alpha$, не однолиственная в области \mathcal{U} .

Теорема 2. Пусть $\alpha \in (1, 2)$. Если f — голоморфная функция, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f'(1) \leq \alpha$ (в смысле углового предела), тогда существует функция, обратная к f и конформно отображающая область

$$\mathcal{Y} = \left\{ w \in \mathbb{C}: |w| < 1 \text{ и } \frac{|1 - w|}{1 - |w|} < \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha - 1}} \right\}$$

на некоторую область \mathcal{X} , содержащуюся в единичном круге с центром в нуле.

Какова бы ни была область \mathcal{V} , содержащаяся в единичном круге с центром в нуле, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \neq \mathcal{Y}$, найдется голоморфная функция f , отображающая единичный круг с центром в нуле в себя, со свойствами $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f'(1) \leq \alpha$, не имеющая обратной в области \mathcal{V} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Landau E. Der Picard–Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. 1926. Vol. 32. P. 467–474.
- [2] Горяйнов В. В. Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 3. С. 54–71.