УДК 517.5

Частный случай построения жестких фреймов в произвольной нульмерной группе[1]

Ю. С. Крусс (Саратов, Россия)
KrussUS@gmail.com

В работе приводится частный случай построения жестких фреймов в произвольной нульмерной группе по известной масштабирующей функции.

Ключевые слова: вейвлет фреймы, нульмерные группы, p-адические числа.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

Special case of construction tight wavelet frames in arbitrary zerodimensional gruop[1]

I. S. Kruss (Saratov, Russia)
KrussUS@gmail.com

In this work we consider some special case of construction tight wavelet frames in arbitrary zerodimensional gruop from a known scaling function.

Keywords: tight wavelet frame, zero-dimensional group, p-adic numbers.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

Пусть $(G, \dot{+})$ – локально-компактная нульмерная аддитивная топологическая группа, топология в которой задана счетной системой вложенных подгрупп $... \supset G_{-n} \supset ... \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset ... \supset G_n \supset ...$ таких, что $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} G_n = G$, $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} G_n = \{0\}$ (0 – нулевой элемент группы G), $(G_n \backslash G_{n+1})^{\#} = p$, где p – простое число. $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$ – базисная последовательность. При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выбираем элемент $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и фиксируем его. Тогда любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде $x = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n$, $a_n = \overline{0, p-1}$. Оператор растяжения $\mathcal{A}\colon G \to G$ задается равенством $\mathcal{A}x := \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$.

Пусть X – совокупность характеров группы G, которая является группой относительно умножения. Обозначим через $G_n^{\perp}$ – аннулятор группы G_n, т.е. $G_n^{\perp} = \{\chi \in X : \forall x \in G_n, (\chi, x) = 1\}$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$ множество ступенчатых функций $f \in L_2(G)$ таких, что $supp\ f \subset G_{-N}$ и f постоянна на множествах вида $G_M \dot{+} g$. Для таких функций масштабирующее уравнение имеет вид $\varphi(x) = p \sum\limits_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$, где $H_0^{(N)} = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N}g_{-N},\ a_j = \overline{0, p-1}\}, N \in \mathbb{N}$.

В частотной форме масштабирующее уравнение можно записать в виде: $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$.

Если сдвиги $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ не ортогональны, то будем строить функции $\psi_\ell(x)$ так, чтобы для любой $f \in L_2(G)$

$$f(x) = \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{h \in H_0} (f, \psi_\ell(\mathcal{A}^n \cdot \dot{-} h))\psi_\ell(\mathcal{A}^n x \dot{-} h).$$

В этом случае аффинная система $\psi_\ell(\mathcal{A}^n x \dot{-} h)$ называется фреймом Парсеваля или жестким вейвлет фреймом.

Теорема 1. *Пусть $G_{-N}^{\perp}\ \chi_\ell$ $(\ell = \overline{1, q-1})$ смежные классы, для которых $m_0(G_{-N}^{\perp}\chi_\ell) = 0$ и $\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp}\chi_\ell\mathcal{A}^{-1}) \neq 0$. Определим маски m_ℓ и вейвлеты ψ_ℓ равенствами*

$$m_\ell(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-N}^{\perp}\chi_\ell}(\chi)\ (\ell = \overline{1, q-1}),\ \hat{\psi}_\ell(\chi) = m_\ell(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}).$$

Тогда вейвлеты (ψ_ℓ) $(\ell = \overline{1, q-1})$ порождают жесткий фрейм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64.