УДК 517.55

Обобщение неравенства Харди – Литтлвуда для классов Харди и свойство Фату[1]

В. Г. Кротов (Минск, Беларусь)
krotov@bsu.by

Для функций из классов Харди $H^p(B^n)$ в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{C}^n$ изучается задача о существовании пределов почти всюду на границе при произвольном подходе точки $z \in B^n$ к точке границы ζ. Для этого использован вариант понятия L^q_w-точки Лебега с некоторым весом w.

Такой подход допускает также абстрактную трактовку для функций на произведении $X \times (0, T)$, где X — пространство с квазиметрикой и мерой, удовлетворяющей некоторому условию роста. Для реализации этого плана получены обобщения классических неравенств Харди–Литтлвуда для функций из классов Харди, не использующих свойств аналитичности, гармоничности и т.п.

Ключевые слова: пространства Харди, свойство Фату, неравенства Харди-Литтлвуда.

Generalization of the Hardy – Littlewood inequality for Hardy classes and the Fatou property[1]

V. G. Krotov (Minsk, Belarus)
krotov@bsu.by

For functions from Hardy classes $H^p(B^n)$ in the unit ball $B^n \subset \mathbb{C}^n$, we study the problem of the existence of limits almost everywhere on the boundary for an arbitrary approach of the point $z\ inB^n$ to the point of the boundary ζ. For this, a version of the concept of a L^q_w -Lebesgue point with some weight w is used.

This approach also allows an abstract interpretation for functions on the product $X \times (0, T)$, where X is a space with quasimetrics and a measure satisfying a certain growth condition. To implement this plan, generalizations of the classical Hardy–Littlewood inequalities are obtained for functions from the Hardy classes that do not use the properties of analyticity, harmonicity, etc.

Keywords: Hardy Spaces, Fatou Property, Hardy–Littlewood Inequalities.

Введение

Пусть B^n – единичный шар в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Класс Харди $H^p(B^n)$, $p > 0$, состоит из голоморфных функций $f : B^n \to \mathbb{C}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{H^p(B^n)} := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p, \quad \|g\|_p := \left(\int\limits_S |g(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{1/p}.$$

Здесь $f_r(z) = f(rz)$, σ — поверхностная мера на границе шара $S = \partial B^n$, нормированная условием $\sigma(S) = 1$.

Функции из классов Харди $H^p(B^n)$, $p > 0$, обладают свойством Фату — они имеют пределы для σ-почти всех точек $\zeta \in S$, когда точка $z \in B^n$ стремится к ζ, оставаясь внутри некоторой области. Опишем это свойство более подробно.

На сфере S имеется естественная квазиметрика

$$d(\zeta, \xi) := |1 - \langle \zeta, \xi \rangle|, \quad \langle \zeta, \xi \rangle := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \overline{\xi}_j, \tag{1}$$

где $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ (см., например, [1, §5.1], [2, Гл. 1, §4]).

С помощью квазиметрики d вводим области подхода к границе (допустимые области Кораньи)

$$D_a(\zeta) := \{r\xi : d(\zeta, \xi) < a(1 - r),\ 0 \le r < 1, \xi \in S\}, \quad \zeta \in S. \tag{2}$$

Здесь и всюду ниже $a > 0$ — любое фиксированное число.

С областями (2) естественным образом связывается понятие D_a-предела (см., например, [1, §5.4]). Каждая функция $f \in H^p(B^n)$, $p > 0$, почти всюду на S имеет D_a-предел при каждом $a > 0$ (см., например, [1, §5.6], [2, Гл. 3, §1]. Будем обозначать этот предел (граничную функцию) так:

$$D_a(\zeta) - \lim f = f^*(\zeta).$$

Области (2) в этом утверждении являются оптимальными и не могут быть существенно расширены. Например, нетрудно показать, что для любой убывающей функции $A : (0, 1] \to [1, +\infty)$, $A(+0) = +\infty$ существует функция $f \in H^p(B^n)$, $p > 0$, для которой предел вдоль областей

$$\{r\eta : d(\zeta, \eta) < A(1 - r)(1 - r),\ 0 \le r < 1,\ \eta \in S\}$$

не существует для σ-почти всех $\zeta \in S$.

1 Свойство Фату

Здесь мы приведем некоторые результаты о граничном поведении функций из классов Харди для случая, когда точка $z \in B^n$ стремится к ζ произвольным образом. Конечно, об обычном пределе речи уже не может быть и мы будем использовать вариант понятия L^q_w-точки Лебега с весом w.

Введем семейство мер ν_α, $\alpha > 0$, на B^n: для измеримого множества $A \subset B^n$ положим

$$\nu_\alpha(A) := \alpha \int\limits_0^1 (1-r)^{\alpha-1} \int\limits_S \chi_A(s\xi)\, d\mu(\xi)\, ds$$

(χ_A — характеристическая функция множества A).

Для точки $\zeta \in S$ и $0 < r, h < 1$ определим области подхода к точке $\zeta \in S$

$$D(\zeta, r, h) := \{s\xi \in B^n : d(\zeta, \xi) < h,\ 1 - r < s < 1\}.$$

Этому семейству областей соответствует максимальный оператор

$$M_\alpha^q f(\zeta) := \sup \left\{ \left(\frac{1}{\nu_\alpha(D(\zeta, r, h))} \int\limits_{D(\zeta,r,h)} |f|^q d\nu_\alpha \right)^{1/q} : 0 < r, h < 1 \right\},$$

где $\zeta \in S$.

Далее запись $A \lesssim B$ означает, что $A \le cB$ для некоторой постоянной $c > 0$, зависящей, возможно, от некоторых параметров.

Теорема 1. *Пусть $0 < p < q < \infty$, $\alpha := n(q/p - 1)$. Тогда для любой функции $f \in H^p(B^n)$ для всех $\lambda > 0$ справедливо неравенство*

$$\sigma(\{M_\alpha^q f > \lambda\}) \lesssim \left(\frac{\|f\|_{H^p}}{\lambda} \right)^q$$

($\lesssim$ не зависит от f и λ).

Из теоремы 1 стандартным способом выводится следующее утверждение о сходимости σ-почти всюду.

Теорема 2. *Пусть $0 < p < q < \infty$, $\alpha := n(q/p - 1)$. Тогда для любой функции $f \in H^p(B^n)$ для σ-почти всех $\zeta \in S$ справедливо соотношение*

$$\lim_{r\to 1, h\to 0} \frac{1}{\nu_\alpha(D(\zeta, r, h))} \int\limits_{D(\zeta,r,h)} |f - f^*(\zeta)|^q d\nu_\alpha = 0.$$

Теоремы 1 и 2 справедливы также при $q = p$ — тогда можно взять любое $\alpha > 0$. Однако в таком случае взять $\alpha = 0$ уже нельзя, так как для любой функция $f \in H^p(B^n)$, отличной от тождественного нуля, $|f|^p$ не может быть суммируемой на B^n по мере ν_0.

2 Обобщение неравенств Харди–Литтлвуда

При доказательстве теоремы 1 использовались следующие неравенства для функций из классов Харди $H^p(B^n)$.

Теорема 3. *Пусть* $0 < p < q \le \infty$, $p \le l$, *тогда для любой функции* $f \in H^p(B^n)$, *выполнены неравенства*

$$|f(z)| \lesssim (1-|z|)^{-n/p} \|f\|_{H^p}, \quad z \in B^n,$$

$$\left(\int\limits_S |f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \right)^{1/q} \lesssim (1-r)^{-n(1/p-1/q)} \|f\|_{H^p}, \quad 0 \le r < 1,$$

$$\left(\int\limits_0^1 (1-r)^{nl(1/p-1/q)-1} \left(\int\limits_S |f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \right)^{l/q} dr \right)^{1/l} \lesssim \|f\|_{H^p}.$$

В одномерном случае теорема 3 была доказана Харди и Литтлвудом [3], Флетт [4] дал для нее другое доказательство, а Митчелл и Хан [5] перенесли ее утверждение на многомерный случай.

Далее мы приведем результат, который обобщает теорему 3 в двух направлениях. С одной стороны, ее утверждение остается справедливым для любой непрерывной (и даже измеримой) функции $f : B^n \to \mathbb{C}$, если в правых частях неравенств (4)–(6) норму $\|f\|_{H^p}$ заменить на $\|N_a f\|_p$, где

$$N_a f(\zeta) := \sup\{|f(z)| : z \in D_a(\zeta)\}, \quad \zeta \in S \quad —$$

максимальная функция, соответствующая областям (2). Квазинормы $\|N_a f\|_p$ и $\|f\|_{H^p}$ эквивалентны с постоянными эквивалентности, зависящими только от n, p и a (см., например, [1, §5.6]).

С другой стороны, единичная сфера $S = \partial B^n \subset \mathbb{C}^n$ будет заменена на весьма общий объект — пространство с квазиметрикой и мерой, удовлетворяющей некоторому условию роста, при этом роль шара B^n будет играть произведение этого пространства на интервал. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, топология которого порождена квазиметрикой d, т.е. функция $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет всем аксиомам метрики, причем неравенство треугольника заменяется более слабым условием: существует такое число $a_d \ge 1$, что для всех $x, y, z \in X$ выполнено неравенство

$$d(x,y) \le a_d[d(x,z) + d(z,y)].$$

Пример квазиметрики — (1).

Квазиметрика d порождает семейство шаров

$$B(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}, \quad x \in X,\ r > 0$$

и топологию X. Пусть еще X снабжено борелевской мерой μ.

Рассмотрим произведение $\mathcal{X} := X \times I$, где $I = (0,T)$, $0 < T \le +\infty$. Для $a > 0$ и каждой точки $x \in X$ определим области

$$\mathcal{D}_a(x) := \{(y,t) \in \mathcal{X} : d(x,y) < at\}.$$

С помощью этих областей вводится $\mathcal{D}_a$-предел и максимальная функция

$$\mathcal{N}_a u(x) := \sup\{|u(y,t)| : (y,t) \in \mathcal{D}_a(x)\}.$$

Далее для $p > 0$ введем классы $\mathcal{H}^p(\mathcal{X})$, состоящие из непрерывных функций $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, для которых конечна величина $\|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}$. Впервые они рассматривались в [6] в случае $X = \mathbb{R}^n$ и в [7] общем случае.

Теорема 4. *Пусть при некотором $n > 0$ мера μ удовлетворяет условию*

$$r^n \lesssim \mu(B(x,r)), \quad x \in X,\ r \in I, \tag{3}$$

($\lesssim$ не зависит от x и r). Пусть еще $0 < p < q \le \infty$ и $p \le l$.

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^p(\mathcal{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x,t)| \lesssim t^{-n/p} \|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}, \quad x \in X, \tag{4}$$

$$\left(\int\limits_X |u(x,t)|^q d\mu(x)\right)^{1/q} \lesssim t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}, \quad t \in I, \tag{5}$$

$$\left(\int\limits_0^T t^{nl(1/p-1/q)-1} \left(\int\limits_X |u(x,t)|^q d\mu(x)\right)^{l/q} dt\right)^{1/l} \lesssim \|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}. \tag{6}$$

Неравенство (4) из теоремы 4 уже отмечалось в [6] в случае $X = \mathbb{R}^n$, см также [8]. Кроме того, неравенство (5) получается из (4) весьма просто. Существенно новым является неравенство (6) в такой общности.

Пример применения теоремы 4: $X = \mathbb{R}^n$ с евклидовым расстоянием и мерой Лебега. Для интегралов Пуассона и Гаусса–Вейерштрасса функций из $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$, неравенства из теоремы 4 доказаны в [4]. В [4] приводятся также такие неравенства для функций, некоторая степень которых субгармонична.

Теорема 1 также переносится на общую ситуацию. Для этого нам понадобится условие удвоения:

$$\mu(B(x,2r)) \lesssim \mu(B(x,r)), \quad x \in X, r > 0$$

($\lesssim$ не зависит от x и r). Будем предполагать это условие выполненным всюду ниже. Отметим, что в случае ограниченного X при условии удвоения существует такое $n > 0$, для которого выполнено (3).

Теорема 5. *Пусть при некотором $n > 0$ выполнено условие* (3), $0 < p < q < \infty$, $\alpha := n(q/p - 1)$. *Тогда для любой функции $f \in \mathcal{H}^p(\mathcal{X})$ для всех $\lambda > 0$ справедливо неравенство*

$$\mu(\{\mathcal{M}_\alpha^q u > \lambda\}) \lesssim \left(\frac{\|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}}{\lambda}\right)^q$$

($\lesssim$ не зависит от u и λ).

В теореме 5 использованы следующие обозначения:

$$\mathcal{M}_\alpha^q u(x) := \sup\left\{\left(\frac{1}{\nu_\alpha(\mathcal{D}(x,t,h))}\int\limits_{\mathcal{D}(x,t,h)} |u|^q d\nu_\alpha\right)^{1/q} : 0 < t, h < 1\right\},$$

где

$$\nu_\alpha(A) := \alpha\int\limits_0^T t^{\alpha-1}\int\limits_X \chi_A(y,t)\,d\mu(y)\,dt, \quad A \subset \mathcal{X},\ \alpha > 0,$$

$$\mathcal{D}(x,t,h) := \{(y,s) \in \mathcal{X} : d(x,y) < h,\ 0 < s < t\}, \quad x \in X,\ 0 < t, h < T.$$

Отметим, что утверждения теорем 4 и 5 сохраняют силу, если в определении классов $\mathcal{H}^p(\mathcal{X})$ непрерывность функций заменить на измеримость.

В заключение остановимся на обобщении теоремы 2.

Пусть $\mathcal{H}_0^p(\mathcal{X})$ — замыкание по квазинорме $\|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}$ класса непрерывных в $X \times [0, T)$ функций с компактным носителем. Нетрудно показать, что для каждой функции $u \in \mathcal{H}_0^p(\mathcal{X})$ для μ-почти всех $x \in X$ существует $\mathcal{N}_a$-предел, который мы обозначим $u^*(x)$ [7].

Теорема 6. *Пусть при некотором* $n > 0$ *выполнено условие* (3), $0 < p < q < \infty$, $\alpha := n(q/p - 1)$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathcal{H}_0^p(\mathcal{X})$ *для* μ*-почти всех* $x \in X$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{t,h \to 0} \frac{1}{\nu_\alpha(\mathcal{D}(x,t,h))} \int\limits_{\mathcal{D}(x,t,h)} |u - u^*(x)|^q d\nu_\alpha = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре в $\mathbf{C}^n$. М. : Мир, 1984. 455 с.

[2] *Александров А. Б.* Теория функций в шаре // Комплексный анализ — многие переменные — 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 8. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 115–190.

[3] *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Zeit. 1932. Vol. 34. P. 403–439.

[4] *Flett T. M.* On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions // Proc. London Math. Soc. 1970. Vol. 20, № 4. P. 749–768.

[5] *Mitchell J., Hahn K. T.* Representation of linear functionals in H^p spaces over bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$ // J. Math. Anal. Appl. 1976. Vol. 56, № 24. P. 379–396.

[6] *Coifman R. R., Meyer K. T., Stein E. M.* Some new function spaces and their applications in harmonic analysis // J. Funct. Anal. 1985. Vol. 62, № 2. P. 304–335.

[7] *Кротов В. Г.* О граничном поведении функций из пространств типа Харди // Известия АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, № 5. С. 957-974.

[8] *Кротов В. Г.* Тент-пространства и их приложения // В сб. «Теория функций и приближений: труды 6-й Саратовской зимней школы, 29 янв.-9 февр. 1992 г. ». Саратов: Изд-во Саратовского университета. 1992. Т. 1. С. 90–101.