УДК 517.53

Критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств в произвольной выпуклой области[1]

О. А. Кривошеева (Уфа, Россия)
kriolesya2006@yandex.ru

В работе изучаются подпространства функций аналитических в неограниченной выпуклой области комплексной плоскости и инвариантных относительно оператора дифференцирования. Исследуется задача фундаментального принципа – представления всех функций из инвариантного подпространства рядами экспоненциальных мономов. Эти экспоненциальные мономы являются собственными и присоединенными функциями оператора дифференцирования в инвариантном подпространстве. Получен простой геометрический критерий фундаментального принципа. Он формулируется лишь при помощи индекса конденсации А. С. Кривошеева последовательности показателей указанных экспоненциальных мономов.

Ключевые слова: инвариантное подпространство, фундаментальный принцип, экспоненциальный моном.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке конкурса "Молодая математика России".

A criterion of the fundamental principle for invariant subspaces in an arbitrary convex domain[1]

O. A. Krivosheeva (Ufa, Russia)
kriolesya2006@yandex.ru

We study subspaces of functions analytic in an unbounded convex domain of the complex plane and invariant with respect to the differentiation operator. The problem of the fundamental principle – the representation of all functions from an invariant subspace by a series of exponential monomials-is investigated. These exponential monomials are eigenfunctions and associated functions of the differentiation operator in the invariant subspace. A simple geometric criterion of the fundamental principle is obtained. It is formulated only with the help of A. S. Krivosheev's condensation index of sequence of exponents of the specified exponential monomials.

Keywords: invariant subspace, fundamental principle, exponential monomial.

Acknowledgements: this work was supported in part by Young Russian Mathematics award.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Символом $\Xi(\Lambda)$ обозначим множество пределов сходящихся последовательностей вида $\left\{\frac{\bar{\lambda}_{k_j}}{|\lambda_{k_j}|}\right\}_{j=1}^{\infty}$ ($\overline{\lambda}$ — комплексное сопряжение). Множество $\Xi(\Lambda)$ замкнуто и является подмножеством единичной окружности $S(0,1)$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda)=\{z^n e^{\lambda_k z}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}.$$

Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — выпуклая область и

$$H_D(\varphi)=\sup_{z\in D}\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}),\quad \varphi\in[0,2\pi]$$

— ее опорная функция. Положим

$$J(D)=\{e^{i\varphi}\in S(0,1):H_D(\varphi)=+\infty\}.$$

Пусть $H(D)$ — пространство функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах $K\subset D$, и $W\subset H(D)$ — нетривиальное замкнутое подпространство, которое инвариантно относительно оператора дифференцирования. Спектр этого оператора в подпространстве W является не более чем счетным множеством $\{\lambda_k\}$ ([1], гл.II,§7). Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ — кратный спектр оператора дифференцирования в подпространстве W. Тогда $\mathcal{E}(\Lambda)$ — семейство его собственных и присоединенных функций в W. Через $W(\Lambda,D)$ замыкание (в пространстве $H(D)$) линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Основной задачей в теории инвариантных подпространств является проблема фундаментального принципа. Говорят, что в W со спектром Λ справедлив фундаментальный принцип, если для любой функции $g\in W$ верно представление

$$g(z)=\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}d_{k,n}z^n e^{\lambda_k z},\quad z\in D, \tag{1}$$

причем ряд сходится равномерно на компактах из D.

В работе [2] приводится критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств в произвольной выпуклой области при условии $\Xi(\Lambda)\subseteq J(D)$. В данной работе этот результат распространяется на случай, когда $\Xi(\Lambda)$ лежит в замыкании $\overline{J(D)}$ множества $J(D)$. Отметим, что этот случай принципиально отличается от случая $\Xi(\Lambda)\subseteq J(D)$. Получен простой геометрический критерий фундаментального принципа, который опирается лишь на понятие индекса конденсации последовательности, составляющей спектр инвариантного подпространства.

Следуя [3], введем индекс конденсации

$$S_\Lambda=\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{|\lambda_k|},\quad q_\Lambda^k(z,\delta)=\prod_{\lambda_m\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|,\lambda_m\neq\lambda_k)}\left(\frac{z-\lambda_m}{3\delta|\lambda_m|}\right)^{n_m}.$$

Положим

$$S_\Lambda(\varphi) = \min_{\{\lambda_{k(j)}\}} \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{j\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^{k(j)}(\lambda_{k(j)},\delta)|}{|\lambda_{k(j)}|},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ и минимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}| \to e^{-i\varphi}$, $j \to \infty$.

Пусть $\varphi \in \mathbb{R}$ и $a \le +\infty$. Положим

$$\Pi(a,\varphi) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}.$$

Множество $\Pi(a,\varphi)$ является полуплоскостью, когда $a \in \mathbb{R}$. Если $a = +\infty$, то $\Pi(a,\varphi) = \mathbb{C}$. Пусть D — неограниченная выпуклая область и $D \ne \Pi(a,\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $a \le +\infty$. Тогда $\partial J(D) = \{e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}\}$ — двухэлементное множество.

Теорема. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D *— выпуклая область, и система* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *не полна в* $H(D)$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ *представляется рядом (1), который сходится равномерно на компактах из области* $D_0 = \Pi(H_D(\varphi_1),\varphi_1) \cap \Pi(H_D(\varphi_2),\varphi_2)$;

2) $\Xi(\Lambda) \subseteq \overline{J(D)}$, $\partial J(D) \subseteq \{e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}\}$, $S_\Lambda > -\infty$ *and* $S_\Lambda(\varphi) = 0$, $\varphi \in \partial J(D) \setminus J(D)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. Москва : Наука, 1983. 176 с.

[2] *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Инвариантные подпространства целых функций // Матем. заметки. 2021. Т. 109, № 3. С. 380–396.

[3] *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68, № 2. С. 71–136.