УДК 517.581

Комплексное обертывание функции $\Gamma(z+1/2)/\Gamma(z+1)$[1]

А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков (Москва, Россия)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

Обсуждается круг вопросов, связанных с интегральными представлениями для гамма-функции Эйлера $\Gamma(z)$ комплексной переменной z. Рассматривается специальное отношение $D(z) \equiv \Gamma(z+1/2)/\Gamma(z+1)$, совпадающее при целых положительных z с нормированным центральным биномиальным коэффициентом. В замкнутой правой полуплоскости (без точки $z=0$) величина $D(z)$ допускает особое интегральное представление, упомянутое для положительных значений переменной в заметке Душана Славича 1975 года. Формула Славича позволяет выводить двусторонние оценки центрального биномиального коэффициента C_{2m}^m, согласующиеся с его асимптотикой при $m \to \infty$. Наш метод доказательства комплексной версии формулы Славича использует представление Мальмстена, выражающее гамма-функцию в виде подходящего несобственного интеграла. Дополнительное исследование указывает на наличие асимптотического ряда, обертывающего логарифм $\sqrt{z}\,D(z)$ в замкнутом угле $|\arg z| \leqslant \pi/4$ с исключенной вершиной.

Ключевые слова: гамма-функция, центральный биномиальный коэффициент, асимптотическое разложение, формула Мальмстена, обертывающий ряд в комплексной плоскости.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).

Complex enveloping of function $\Gamma(z+1/2)/\Gamma(z+1)$[1]

A. B. Kostin, V. B. Sherstyukov (Moscow, Russia)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

The article discusses a range of issues related to integral representations for the Euler gamma function $\Gamma(z)$ of the complex variable z. We consider the special quotient $D(z) \equiv \Gamma(z+1/2)/\Gamma(z+1)$ coinciding for positive integers z with the normalized central binomial coefficient. In the closed right half-plane (without the point $z=0$), the quantity $D(z)$ admits a special integral representation, mentioned for positive values of the variable in a 1975 by D. Slavić. Slavić formula allows one to derive two-sided estimates for the central binomial coefficient C_{2m}^m, consistent with its asymptotic as $m \to \infty$. Our method of proving a complex version of Slavić formula uses the Malmsten representation expressing the gamma function in the form of a suitable improper integral. Additional research indicates the presence of an asymptotic series, enveloping the logarithm of $\sqrt{z}\,D(z)$ in a closed angle $|\arg z| \leqslant \pi/4$ with an excluded vertex.

Keywords: gamma function, central binomial coefficient, asymptotic expansion, Malmsten formula, enveloping series in the complex plane.

Acknowledgements: the article is done with the financial support of RFFI (project № 18-01-00236).

Вопросы, относящиеся к эйлеровой гамма-функции и биномиальным коэффициентам, составляют важный раздел классического анализа. В последнее время наблюдается интерес к получению асимптотически точных оценок подобных величин (см., например, [1]–[3]). Обзор некоторых результатов по затронутой тематике дан в работе [4].

Рассмотрим специальную величину

$$D(z) \equiv \frac{\Gamma(z+1/2)}{\Gamma(z+1)}, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0, \quad z \neq 0, \tag{1}$$

с важным интерполяционным свойством

$$D(m) \equiv \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)} = \sqrt{\pi}\, 2^{-2m} C_{2m}^{m}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где C_{2m}^{m} — центральный биномиальный коэффициент.

В краткой заметке Славича [5] для функции (1) приводится неочевидная формула

$$D(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left\{ - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\, e^{-4tx}\, dt \right\}, \qquad x > 0. \tag{3}$$

Из (2), (3) получаем интегральное представление центрального биномиального коэффициента

$$C_{2m}^{m} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \exp\left\{ - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\, e^{-4mt}\, dt \right\}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Формула (4) позволяет доказать (см. [5], [6]) универсальные двойные неравенства

$$\frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \exp\left\{ \sum_{k=1}^{2M-1} \frac{b_k}{m^{2k-1}} \right\} < C_{2m}^{m} < \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \exp\left\{ \sum_{k=1}^{2M} \frac{b_k}{m^{2k-1}} \right\}, \tag{5}$$

действующие при всех $m \in \mathbb{N}$ и любом выборе параметра $M \in \mathbb{N}$. Коэффициенты b_k в (5) вычисляются через числа Бернулли B_{2k} по правилу

$$b_k = \frac{(2^{-2k}-1)\, B_{2k}}{k(2k-1)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что в недавней работе Попова [3] для получения как (5), так и новых, уточненных оценок величины C_{2m}^{m}, вместо (4) существенно использовалась при $z = x > 0$ так называемая вторая формула Бине

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \exp\left\{ z \ln z - z + 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{\exp(2\pi t) - 1}\, dt \right\},$$

справедливая в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Как оказалось, формула Славича (3) распространяется на множество $\operatorname{Re} z \geqslant 0,\ z \neq 0$, и удобным инструментом при доказательстве такого утверждения служит восходящее к Мальмстену (1847 г.) представление

$$\Gamma(z) = \exp\left\{ \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + (z-1)\, e^{-t} \right) \frac{dt}{t} \right\},$$

также справедливое в замкнутой правой полуплоскости с исключенной точкой $z = 0$ (подробности см. в [7]).

Результат (5) есть очевидное следствие более общих оценок

$$\sum_{k=1}^{2M-1} \frac{(2^{-2k}-1)\, B_{2k}}{k(2k-1)\, x^{2k-1}} < \ln\left(\frac{\sqrt{x}\, \Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x+1)} \right) < \sum_{k=1}^{2M} \frac{(2^{-2k}-1)\, B_{2k}}{k(2k-1)\, x^{2k-1}},$$

доказанных в [6] при всех $x > 0$ и $M \in \mathbb{N}$. Эти оценки означают, что функция

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x}\, \Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x+1)} \right) = \ln\left(\sqrt{x}\, D(x) \right)$$

при $x > 0$ обвертывается рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{-2k}-1)\, B_{2k}}{k(2k-1)\, x^{2k-1}}.$$

Основываясь на недавних результатах [6], [7], мы показываем, что подобное свойство имеет место в угле $-\pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/4,\ z \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Попов А. Ю.* Новые двусторонние оценки гамма-функции и чисел сочетаний из $2n$ по n. Усиленное обвертывание асимптотическим рядом // Матем. заметки. 2018. Т. 103, № 5. С. 785–789.

[2] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Сер. Современная математика и ее прилож. Тематич. обзоры. 2019. Т. 170. С. 71–117.

[3] *Попов А. Ю.* Двусторонние оценки центрального биномиального коэффициента // Челяб. физ.-матем. журн. 2020. Т. 5, № 1. С. 56–69.

[4] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Сравнительный анализ двусторонних оценок центрального биномиального коэффициента // Челяб. физ.-матем. журн. 2020. Т. 5, № 1. С. 70–95.

[5] *Slavić D. V.* On inequalities for $\Gamma(x+1)/\Gamma(x+1/2)$ // Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika. 1975. Vol. 498/541. P. 17–20.

[6] *Kostin A. B., Sherstyukov V. B.* Asymptotic behavior of remainders of special number series // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 251. P. 814–838.

[7] *Костин А. Б., Шерстюков В. Б.* Об интегральных представлениях величин, связанных с гамма-функцией // Уфимский матем. журн. 2021. Т. 13, № 4. С. 51–64.