УДК 517.96, 517.984

О смешанных задачах с производными в краевых условиях[1]

В. В. Корнев, А. П. Хромов (Саратов, Россия)
KornevVV@sgu.ru

Приводится решение смешанной задачи для волнового уравнения, не допускающей разделения переменных, с использованием резольвентного подхода и расходящихся рядов.

Ключевые слова: смешанная задача, волновое уравнение, резольвентный подход, расходящийся ряд.

On mixed problems with derivatives in boundary conditions[1]

V. V. Kornev, A. P. Khromov (Saratov, Russia)
KornevVV@sgu.ru

The solution of mixed problem for wave equation, unsolvable by separating variables, is given. It is based on the resolvent method and on the use of divergent series.

Keywords: mixed problem, wave equation, resolvent method, divergent series.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty); \tag{1}$$

$$U_1(u) = u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0; \tag{2}$$

$$U_2(u) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0; \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u'_t(x,0) = 0. \tag{4}$$

Формальное решение этой задачи по методу Фурье есть

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\, cos\rho t d\lambda, \tag{5}$$

где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора $L : Ly = -y''(x)$, $y'(0)+\alpha_1 y(0)+\beta_1 y(1) = y'(1)+\alpha_2 y(0)+\beta_2 y(1) = 0$; E - единичный оператор, $\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Re}\rho \geqslant 0$, γ_n - замкнутый контур в λ - плоскости вокруг n-го собственного значения оператора L, $r > 0$ и достаточно велико и фиксировано, n_0 такой номер, что при $n \geqslant n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все γ_n при $n \geqslant n_0$ находятся вне $|\lambda| = r$.

Мы считаем, что $\varphi(x) \in L[0,1]$. Тогда ряд (5) имеет смысл, хотя он может быть и расходящимся.

Учитывая теоремы 8 и 9 из [1], естественно назначить ряду (5) в качестве суммы следующую функцию

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)], \tag{6}$$

где $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$ и продолжается на все $x \in \mathbb{R}$ по правилу:

$$(\widetilde{\varphi}(-x), \widetilde{\varphi}(1+x))^T = (\widetilde{\varphi}(x), \widetilde{\varphi}(1-x))^T + 2M \int\limits_0^x e^{M(x-t)}(\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\varphi}(1-t))dt, \tag{7}$$

T - знак транспонирования, $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим теперь другую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),\ (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty); \tag{8}$$

$$U_1(u) = 0,\ U_2(u) = 0; \tag{9}$$

$$u(x,0) = 0,\ u'_t(x,0) = 0. \tag{10}$$

Формальное решение по методу Фурье задачи (8)-(10) есть

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0}^{\infty} \int\limits_{\gamma_n}\right) \int\limits_0^t R_\lambda(f(\bullet,\tau)) \frac{sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\lambda, \tag{11}$$

где R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по переменной x (τ - параметр).

Ряд (11) имеет смысл, если $f(x,t)$ - локально суммируемая в $[0,1] \times [0,\infty)$, и является, вообще говоря, расходящимся. Используя расходящиеся ряды, так же, как и в [2], получаем для ряда (11) следуюущую сумму:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\eta, \tag{12}$$

где $\widetilde{f}(\eta,\tau) = f(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$ и продолжается на все $\eta \in \mathbb{R}$ по правилу (2).

Рассмотрим основную задачу нашего исследования:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x,t)u(x,t),\ (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty); \tag{13}$$

$$U_1(u) = U_2(u) = 0; \tag{14}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u'_t(x,0) = 0. \tag{15}$$

Считаем, что $\varphi(x) \in L[0,1]$ и $q(x,t)u(x,t) \in L[Q_T]$ при любом T, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$.

Задача (13)-(15) не относится к задачам на метод Фурье.

Представим решение задачи (13)-(15) в виде $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)$, где $u_0(x,t)$ есть решение задачи (1)-(4), которое мы определяем по формуле (6). Для $u_1(x,t)$ имеем систему (8)-(10), где $f(x,t) = -q(x,t)u(x,t)$. Поэтому для $u_1(x,t)$ имеет место формула (12). Тем самым осуществили переход от (13)-(15) к уравнению

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\eta, \tag{16}$$

где $f(\eta,\tau) = -q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$ и продолжается на все $\eta \in \mathbb{R}$ по формуле (2).

Рассмотрим уравнение (16). Подставляя формально правую часть (16) в интеграл в (16) вместо $u(\eta,\tau)$ бесконечное число раз, приходим к ряду

$$A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t),\ (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{17}$$

где $a_0(x,t)$ есть правая часть (6); $a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)d\eta$, $n = 1,2,...$; $f_n(x,t) = -q(x,t)a_n(x,t),\ n = 0,1,...$.

Теорема 1. *Если при* $(x,t) \in Q_T$ $|q(x,t)| \leqslant q_1(x)$, $q_1(x) \in L[0,1]$, *то ряд* $A(x,t)$ *сходится в* Q_T *абсолютно и равномерно по* x *и* t *с экспоненциальной скоростью.*

Теорема 2. *Предположим, что* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *абсолютно нерперывны,* $\varphi'(0) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = \varphi'(1) + \alpha_2\varphi(0) + \beta_2\varphi(1) = 0$, $q(x,t) = q_1(x)q_2(x,t)$, $q_1(x) \in L[0,1]$, $q_2(x,t)$ *и* q'_{2t} *из* $C[Q_T]$ *при любом* $T > 0$. *Тогда* $A(x,t)$ *является классическим решением (удовлетворяющим уравнению* (13) *почти всюду) задачи* (13)-(15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Труды института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238.

[2] *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 10. С. 280–288.