УДК 517.538

О скорости интерполяции аналитических функций посредством h-сумм[1]

М. А. Комаров (Владимир, Россия)
kami9@yandex.ru

Изучается n-кратная интерполяция функций $f(z) = f_0 + f_1 z + \ldots$, аналитических вблизи нуля, посредством h-сумм $H_n(z) = \lambda_1 h(\lambda_1 z) + \cdots + \lambda_n h(\lambda_n z)$, где $h(z) = h_0 + h_1 z + \ldots$ — фиксированная функция, аналитическая в единичном круге, $h_m \neq 0$, $|h_m| \leq C$. При условии, что $|f_m/h_m| \leq a(m+1)^{-s}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ ($a := (1 - s^{-1})\gamma^{-1}2^{-s}$), с некоторыми $s > 1$ и $\gamma > 1$, получена поточечная оценка остатка $r_n(z) = f(z) - H_n(z)$ в круге $|z| \leq 1$. Наша оценка уточняет известные результаты, полученные для случая $|f_m/h_m| \leq 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Ключевые слова: интерполяция, h-суммы, степенные суммы.

On the rate of interpolation of analytic functions by h-sums[1]

M. A. Komarov (Vladimir, Russia)
kami9@yandex.ru

We study the n-multiple interpolation of functions $f(z) = f_0 + f_1 z + \ldots$, analytic near the origin, by h-sums $H_n(z) = \lambda_1 h(\lambda_1 z) + \cdots + \lambda_n h(\lambda_n z)$, where $h(z) = h_0 + h_1 z + \ldots$ is a fixed function, analytic in the unit disk, $h_m \neq 0$, $|h_m| \leq C$. Under the condition that $|f_m/h_m| \leq a(m+1)^{-s}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ ($a := (1 - s^{-1})\gamma^{-1}2^{-s}$), with some $s > 1$ and $\gamma > 1$, we obtain a pointwise estimate of the remainder $r_n(z) = f(z) - H_n(z)$ in the disk $|z| \leq 1$. Our estimate improves some known results, obtained for the case $|f_m/h_m| \leq 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Keywords: interpolation, h-sums, power sums.

В [1] был предложен метод аппроксимации аналитических вблизи $z = 0$ функций

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^m$$

посредством так называемых h-сумм

$$H_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h(\lambda_k z), \qquad \lambda_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m z^m, \qquad h_m \neq 0,$$

это фиксированная аналитическая в открытом единичном круге функция, а комплексные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ выбираются из условия n-кратной интерполяции

$$f(z) - H_n(z) = O(z^n), \qquad z \to 0.$$

Нетрудно проверить, что набор $\{\lambda_k\}$ совпадает с (единственным) решением следующей системы моментов для степенных сумм:

$$\lambda_1^{m+1} + \dots + \lambda_n^{m+1} = f_m/h_m, \qquad m = 0, 1, \dots, n-1. \tag{1}$$

Основной результат работы [1] можно сформулировать так: *если*

$$|f_m/g_m| \le 1, \qquad m = 0, 1, 2, \dots,$$

а числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *удовлетворяют системе* (1)*, то* H_n *и* f *определены и аналитичны в круге* $|z| < \rho = 1/2$*, причём* $H_n(z) \to f(z)$ *равномерно в любом круге* $|z| \le (1-\delta)\rho$*,* $\delta \in (0,1)$*, и*

$$|f(z) - H_n(z)| \le C(h, \delta) n (1 - \delta/2)^n, \qquad |z| \le (1-\delta)\rho.$$

Доказательство этой теоремы опирается на оценку решений (1), согласно которой при условии

$$|\lambda_1^{m+1} + \dots + \lambda_n^{m+1}| \le 1, \qquad m = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2}$$

выполняются неравенства

$$|\lambda_k| \le \rho^{-1} = 2, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Радиус круга сходимости H_n к f был уточнён в работе [2], где установлено, что на самом деле при условии (2) имеет место более сильная оценка

$$|\lambda_k| \le (1 - \varepsilon_n)^{-1}, \qquad k = 1, \dots, n,$$

с величиной $\varepsilon_n \to 0$ ($n \to \infty$), определяемой из уравнения

$$\varepsilon_n^2 - (1 - \varepsilon_n)^{n+1} = 0, \quad \varepsilon_n \in (0, 1).$$

В настоящей работе исследуется случай степенного убывания сумм в (1). В частности, доказывается следующая

Лемма. *Если при некоторых* $s > 1$ *и* $\gamma > 1$ *первые* n *степенных сумм комплексных чисел* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *удовлетворяют неравенствам*

$$|\lambda_1^m + \dots + \lambda_n^m| \le \frac{a}{m^s}, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$a = a(s,\gamma) := \frac{s-1}{\gamma s 2^s},$$

то

$$\max_{1\le k\le n} |\lambda_k| < \gamma^{-1/n}.$$

Видим, что при указанном убывании первых n степенных сумм все λ_k лежат внутри единичного круга, в отличие от случая (2) (отметим, что для s, близких к 1, оценку можно улучшить, заменив в определении $a(s,\gamma)$ числитель $s-1$ положительной величиной, отделённой от нуля).

При помощи леммы можно установить, например, следующую оценку погрешности интерполяции функций f суммами H_n:

Теорема. *Если коэффициенты h_m ограничены:*

$$0 < |h_m| \le C, \qquad m = 0, 1, \dots,$$

и при некоторых $s > 1$, $\gamma > 1$ выполняется условие

$$|f_m/h_m| \le \frac{a}{(m+1)^s}, \quad m = 0,1,2,\dots, \quad a = a(s,\gamma) = \frac{s-1}{\gamma s 2^s},$$

а числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $(n \in \mathbb{N})$ выбраны как решение системы (1), то в замкнутом единичном круге верна оценка

$$|f(z) - H_n(z)| \le \frac{n|z|^n}{\gamma}\Big(\frac{C}{s(2n)^s} + \frac{C}{\gamma^{1/n} - |z|}\Big), \quad |z| \le 1,$$

а суммы H_n определены и аналитичны в круге $|z| < \gamma^{1/n}$, содержащем единичный круг.

При $h(z) = (z-1)^{-1}$ получается оценка интерполяции функций определённого вида посредством *наипростейших дробей*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z_k := \lambda_k^{-1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Данченко В. И.* Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Матем. заметки. 2008. Т. 38, № 5. С. 643–649.

[2] *Чунаев П. В.* Об одном нетрадиционном методе аппроксимации // Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 281–287.