УДК 517.984

О задаче рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью[1]

М. Ю. Игнатьев (Саратов, Россия)

email@mail.ru

В работе устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью в случае отсутствия дискретного спектра.

Ключевые слова: теория рассеяния, обратные задачи, системы с особенностью.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10001, https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

On scattering problem for differential systems with a singularity[1]

M. Yu. Ignatiev (Saratov, Russia)

email@mail.ru

In the paper, we obtain necessary and sufficient solvability conditions to inverse scattering problem for the differential systems with a singularity in the case of empty discrete spectrum

Keywords: scattering theory, inverse problems, systems with a singularity.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation № 21-71-10001, https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y \tag{1}$$

со спектральным параметром ρ, где $A, B, q(x), x \in (0,\infty)$ – $n \times n$ ($n > 2$) матрицы, причем матрицы A и B постоянны, $B = diag(b_1, \dots, b_n)$, элементы $b_1, \dots, b_n$ – различные ненулевые комплексные числа. Относительно матриц A и B будем считать выполненными те же условия, что в [2].

Обозначим через Σ объединение прямых вида:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \left\{\rho : \mathrm{Re}(\rho b_j) = \mathrm{Re}(\rho b_k)\right\}.$$

Представим множество $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ в виде $\mathbb{C}\setminus\Sigma = \bigcup\limits_{\nu=1}^{N} \mathcal{S}_\nu$ объединения непересекающихся открытых секторов $\mathcal{S}_\nu$. В каждом из секторов $\mathcal{S}_\nu$ существует перестановка $R_1, \dots, R_n$ чисел $b_1, \dots, b_n$ такая, что $\mathrm{Re}(R_1\rho) < \mathrm{Re}(R_2\rho) < \dots < \mathrm{Re}(R_n\rho)$ при $\rho \in \mathcal{S}_\nu$.

Определение. Пусть $\rho \in \mathcal{S}_\nu$, $k \in \{1, \dots, n\}$ фиксированы. Решение $\Psi_k(x,\rho)$, $x \in (0,\infty)$ системы (1) называется k-м решением типа Вейля, если оно удовлетворяет условиям:

$$\Psi_k(x,\rho) = O\left(x^{\mu_k}\right), x \to 0,$$

$$\Psi_k(x,\rho) = \exp(\rho x R_k)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty.$$

Здесь $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ – собственные значения матрицы A, $(\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_n) = \mathfrak{f}$ – матрица перестановок, такая что $(R_1, \dots, R_n) = (b_1, \dots, b_n)\mathfrak{f}$.

В простейшем случае $q = 0$ решения типа Вейля существуют для всех $\rho \neq 0$ при выполнении *условия информативности* [1], [2]. В общем случае k-е решение типа Вейля существует и единственно для всех таких $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, для которых $\Delta_k(\rho) \neq 0$, где $\Delta_k(\rho)$ характеристическая функция [1].

Обозначим через Σ_ν открытый луч, разделяющий секторы $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$ (здесь предполагается, что нумерация секторов осуществляется в направлении против часовой стрелки и $\mathcal{S}_{N+1} := \mathcal{S}_1$). Если некоторая функция $f(\rho)$ определена при $\rho \in \mathcal{S}_\nu \cup \mathcal{S}_{\nu+1}$, то через $f^\pm(\rho)$, $\rho \in \Sigma_\nu$ обозначим пределы

$$f^\pm(\rho) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(\rho \pm i\varepsilon\rho).$$

Известно [1], что предельные значения $\Delta_k^\pm(\rho)$, $\rho \in \Sigma_\nu$ существуют для всех k, ν. Будем говорить, что $q(\cdot) \in G_0^p$, если для каждого $\nu = \overline{1,N}$ и для всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$

$$\prod_{k=1}^n \Delta_k^\pm(\rho) \neq 0.$$

Если $q(\cdot) \in G_0^p$, то для любого $\rho \in \Sigma' := \bigcup\limits_{\nu=1}^N \Sigma_\nu = \Sigma \setminus \{0\}$ существуют предельные значения $\Psi^\pm(x,\rho)$, где $\Psi(x,\rho) := (\Psi_1(x,\rho), \dots, \Psi_n(x,\rho))$. Поскольку каждая из матриц $\Psi^-(x,\rho)$, $\Psi^+(x,\rho)$ удовлетворяет системе (1), для каждого $\rho \in \Sigma'$ определена (единственная) матрица $v(\rho)$ такая, что $\Psi^+(x,\rho) = \Psi^-(x,\rho)v(\rho)$.

Матрицу-функцию $v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ будем называть *данными рассеяния.*

Задача 1. *Найти $q(\cdot) \in G_0^p$ по известным данным рассеяния $v(\cdot)$.*

Далее рассматривается вопрос о необходимых и достаточных условиях разрешимости Задачи 1.

Определим пространство $\mathcal{H}(\Sigma)$ как пространство, состоящее из функций $\varphi \in L_2(\Sigma)$, таких что для каждого $\nu = \overline{1,N}$ ограничение $\varphi(\rho)|_{\rho\in\Sigma_\nu}$

непрерывно и существуют $\lim\limits_{\rho\to 0,\rho\in\Sigma_\nu}\varphi(\rho)$ и $\lim\limits_{\rho\to\infty,\rho\in\Sigma_\nu}\varphi(\rho)$, причем

$$\lim_{\rho\to\infty,\rho\in\Sigma_\nu}\varphi(\rho)=0.$$

Через $\mathcal{H}_0(\Sigma)$ обозначим подпространство, состоящее из таких $\varphi(\cdot)\in\mathcal{H}(\Sigma)$, что для каждого $\nu=\overline{1,N}$ $\lim\limits_{\rho\to 0,\rho\in\Sigma_\nu}\varphi(\rho)=0$. Введем при $\rho\in\Sigma'$ матрицу перестановок $\Pi(\rho)$ такую, что

$$(R_1^+(\rho),\ldots,R_n^+(\rho))=(R_1^-(\rho),\ldots,R_n^-(\rho))\Pi(\rho).$$

Ясно, что $\Pi(\rho)$ представляет собой блочно–диагональную матрицу, постоянную на каждом из лучей Σ_ν. Через $\mathcal{H}_0^\Pi(\Sigma)$ будем обозначать пространство нижнетреугольных блочно - диагональных (где блочная структура - та же, что у матрицы $\Pi(\cdot)$) матриц-функций с элементами из $\mathcal{H}_0(\Sigma)$.

Для $\rho\in\Sigma'$ определим I_- как множество k таких, что $\mathrm{Re}(\rho R_k^-)=\mathrm{Re}(\rho R_{k+1}^-)$.

Определение. Будем говорить, что матрица-функция $v=v(\rho)$, $\rho\in\Sigma'$ принадлежит классу $\mathbf{V}$, если

1. $v(\cdot)-v_0(\cdot)\in\mathcal{H}_0^\Pi(\Sigma)$ (здесь и далее $v_0(\cdot)$ – данные рассеяния невозмущенной системы (1) с $q=0$);

2. нетривиальные диагональные блоки матрицы $v(\rho)$ расположены в строках с номерами k и $k+1$, где $k\in I_-$, и имеют вид

$$\begin{pmatrix} v_{kk} & 0\\ 1 & v_{k+1,k+1}\end{pmatrix},$$

   причем $v_{kk}v_{k+1,k+1}=-1$.

Теорема 1. *Если матрица-функция $v=v(\rho),\rho\in\Sigma'$ является данными рассеяния для некоторой системы вида (1) с $q(\cdot)\in G_0^p$, то $v(\cdot)\in\mathbf{V}$.*

Обозначим через $\Psi_0(x,\rho)$ матрицу $\Psi(x,\rho)$ в случае невозмущенной системы (1) с $q=0$. Для заданной матрицы-функции $v=v(\rho)$, $\rho\in\Sigma'$ определим:

$$\hat v(\rho):=v(\rho)v_0^{-1}(\rho)-I,$$

$$V=V(v,x,\rho):=\Psi_0^-(x,\rho)v(\rho)v_0^{-1}(\rho)(\Psi_0^-(x,\rho))^{-1},$$

$$\hat V(v,x,\rho):=V(v,x,\rho)-I=\Psi_0^-(x,\rho)\hat v(\rho)(\Psi_0^-(x,\rho))^{-1}.$$

Введем зависящие от параметров $v \in \mathbf{V}$, $x \in [0, \infty)$ операторы

$$\mathbf{A}(v, x) f(\rho) := C^+ f(\rho) - (C^- f)(\rho) V(v, x, \rho) = f(\rho) - (C^- f)(\rho) \hat{V}(v, x, \rho).$$

Далее, определим (при тех значениях параметров, при которых правая часть имеет смысл):

$$\mathbf{p}(v, x, \cdot) := (\mathbf{A}(v, x))^{-1} \hat{V}(v, x, \cdot),$$

$$\mathbf{q}(v, \cdot) := \mathbf{\Phi}(\hat{v}(\cdot), \mathbf{p}(v, \cdot, \cdot)) + \mathbf{F}\hat{v}(\cdot),$$

где $\mathbf{F} = s - \lim\limits_{r \to \infty} \mathbf{F}_r$,

$$\mathbf{F}_r f(x) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma \cap \{|\rho| < r\}} d\rho \, \left[B, \Psi_0^-(x, \rho) f(\rho) (\Psi_0^-(x, \rho))^{-1}\right],$$

$$\mathbf{\Phi}(u, \varphi)(x) := \frac{1}{2\pi i} \left[B, \int\limits_{\Sigma} d\rho \left(C^- \varphi(x, \cdot)\right)(\rho) \hat{V}(u, x, \rho)\right],$$

$$\hat{V}(u, x, \rho) := \Psi_0^-(x, \rho) u(\rho) (\Psi_0^-(x, \rho))^{-1},$$

$$C^\pm f(\rho) := (Cf)^\pm(\rho), \ Cf(\rho) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} f(\zeta), \ \rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma;$$

Теорема 2. *Пусть дана матрица-функция $v(\cdot) \in \mathbf{V}$. Для того, чтобы $v(\cdot)$ являлась данными рассеяния для некоторого $q(\cdot) \in G_0^p$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *для каждого $x \in [0, \infty)$ оператор $\mathbf{A}(v, x)$ обратим;*
2. *для каждого $k = \overline{1, n}$ найдется функция $\delta_k(\rho)$, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, аналитическая в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ и такая, что:*
   - *для каждого $\nu = \overline{1, N}$ существует непрерывное продолжение функции $\rho^{\mu_k} \delta_k(\rho)$ в $\overline{\mathcal{S}}_\nu$;*
   - *$\rho^{\mu_k} \delta_k(\rho)$ не обращается в нуль ни для каких $\rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$, $\nu = \overline{1, N}$;*
   - *при $\rho \in \Sigma'$ справедливы формулы сопряжения $\delta^-(\rho) = v_{kk}(\rho) \delta_k^+(\rho)$;*
   - *при $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ справедлива асимптотика $\delta(\rho) = \delta_0(\rho)(I + o(1))$, кроме того, $\delta^\pm(\cdot)(\delta_0^\pm(\cdot))^{-1} - I \in L_2(\Sigma)$. Здесь $\delta_0(\rho)$ – диагональная матрица, такая что $\delta_{0,kk}(\rho) \Psi_{0k}(x, \rho) = x^{\mu_k}(\mathfrak{h}_k + o(1))$ при $x \to 0$, $\mathfrak{h}_k$ - собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению μ_k.*

3. $\mathbf{q}_{kj}(v,\cdot) \in X_p$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ignatyev M.* Spectral Analysis for Differential Systems with a Singularity // Results Math. 2017. Vol. 71. P. 1531–1555.

[2] *Ignatiev M.* On Weyl-type Solutions of Differential Systems with a Singularity. The Case of Discontinuous Potential // Mathematical Notes. 2020. Vol. 108, № 6. P. 814–826.